6. Гладкие отображения и подмногообразия

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^N$, $x_0 \in U$. Напомним (см. 2-й листок), что *касательным пространством* к U в x_0 называется множество $T_{x_0}U$ всех пар (x_0, ξ), где $\xi \in \mathbb{R}^N$. Оно является N-мерным векторным пространством относительно операций $(x_0, \xi) + (x_0, \eta) = (x_0, \xi + \eta)$ и $\lambda(x_0, \xi) = (x_0, \lambda\xi)$ (где $\lambda \in \mathbb{R}$).

В следующей задаче пространство $T_{x_0}U$ отождествляется (как множество, но не как векторное пространство!) с $\mathbb{R}^N$ посредством отображения $(x_0, \xi) \mapsto x_0 + \xi$.

Задача 1. Пусть M — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^N$ размерности n (см. предыдущий листок), $m = N - n$. Зафиксируем точку $x_0 \in M$, окрестность $U \ni x_0$ и гладкое отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ ранга m такие, что $M \cap U = \{x \in U : F(x) = 0\}$. Убедитесь, что определение касательного пространства $T_{x_0}M$, данное на лекции, эквивалентно следующему: $T_{x_0}M = \operatorname{Ker}\bigl(dF(x_0)\colon T_{x_0}U \to T_{F(x_0)}\mathbb{R}^m\bigr)$. В частности, $T_{x_0}M$ — векторное подпространство в $T_{x_0}U$.

Задача 2. Пусть M — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^N$ размерности n. Зафиксируем точку $x_0 \in M$, окрестность $U \ni x$, открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ и гладкое отображение $\varphi\colon V \to U$ ранга n такие, что $M \cap U = \varphi(V)$ и $\varphi\colon V \to \varphi(V)$ — гомеоморфизм (см. задачу 4.4 из предыдущего листка). Докажите, что $T_{x_0}M = \operatorname{Im}\bigl(d\varphi(v_0)\colon T_{v_0}V \to T_{x_0}U\bigr)$, где $v_0 = \varphi^{-1}(x_0)$.

Определение. Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ — гладкие подмногообразия. Будем говорить, что отображение $f\colon M \to N$ принадлежит классу C^p (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), если оно продолжается до отображения $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^n$ класса C^p, где $U \subset \mathbb{R}^m$ — некоторая окрестность M.

Определение. Пусть $M \subset \mathbb{R}^N$ — гладкое подмногообразие, $x_0 \in M$, f и g — гладкие функции, определенные в некоторых окрестностях x_0. (Здесь слово «окрестность» означает «окрестность в M», т.е. содержащее x_0 множество вида $U = M \cap V$, где $V \subset \mathbb{R}^N$ открыто.) Будем называть f и g *эквивалентными* в x_0, если они совпадают в некоторой (возможно, меньшей) окрестности x_0. Класс эквивалентности функции f называется ее *ростком* в x_0. Множество всех ростков бесконечно гладких функций в x_0 обозначается через $C^\infty_{x_0}$. Оно очевидным образом наделяется структурой алгебры: сумма (произведение) ростков — это, по определению, росток их суммы (произведения).

Задача 3. Обозначим через $\mathfrak{m}_{x_0}$ идеал в $C^\infty_{x_0}$, состоящий из всех ростков f, для которых $f(x_0) = 0$. Через $\mathfrak{m}^2_{x_0}$ обозначим линейную оболочку ростков вида fg, где $f, g \in \mathfrak{m}_{x_0}$.

Постройте изоморфизмы между следующими векторными пространствами:

1) касательное пространство $T_{x_0}M$;

2) пространство всех линейных функционалов $D\colon C^\infty_{x_0} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $D(fg) = D(f)g(x_0) + f(x_0)D(g)$ для всех $f, g \in C^\infty_{x_0}$;

3) пространство $(\mathfrak{m}_{x_0}/\mathfrak{m}^2_{x_0})^*$.

Задача 4. Может ли открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ быть диффеоморфным открытому подмножеству $\mathbb{R}^m$ при $m \neq n$?

Задача 5. Разложите диффеоморфизмы
1) $(x,y) \mapsto (x+y^2, y+x^2)$ в окрестности точки $(0,0)$ и
2) $(x,y,z) \mapsto (x\cos y\cos z, x\cos y\sin z, x\sin y)$ в окрестности точки $(1,0,0)$
в композицию простейших (т.е. меняющих только одну координату).

Задача 6. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ — отображение класса C^1. Докажите, что для любой точки $x_0 \in U$ найдется такая окрестность $V \ni x_0$, что $\mathrm{rk}_x f \geqslant \mathrm{rk}_{x_0} f$ для всех $x \in V$. Может ли случиться так, что $\mathrm{rk}_x f > \mathrm{rk}_{x_0} f$ для всех $x \neq x_0$?

Задача 7. (*Зонтик Уитни*). Найдите критические точки отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (xy, y, x^2)$ и нарисуйте его образ.

Задача 8. Докажите, что если отображения $f\colon U \to E$ и $g\colon V \to F$ (где $U, V \subset \mathbb{R}^n$ и $E, F \subset \mathbb{R}$ — открытые подмножества) C^2-эквивалентны и $x_0 \in U$ — невырожденная критическая точка f, то соответствующая ей точка $y_0 \in V$ является невырожденной критической точкой g.

Задача 9. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность нуля и $f \in C^p(U)$ — функция вида $f = \sum_i x^i g_i$, где $x^1, \ldots, x^n$ — координаты в $\mathbb{R}^n$ и g^i — некоторые функции на U. Докажите, что $g \in C^{p-1}(U)$ и $g_i(0) = f'_{x^i}(0)$.

Задача 10. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $x_0 \in U$ — невырожденная критическая точка функции $f \in C^2(U)$, $g(x) = \sum_i \tau_i (x^i)^2$, где $\tau_i = \pm 1$, — морсовская форма f (т.е. квадратичная форма, C^2-эквивалентная f в окрестности x_0). Как найти сигнатуру формы g (т.е. число положительных и отрицательных τ_i), зная тейлоровское разложение f в x_0?

Задача 11. Пусть $f(x,y) = e^x + e^y - e^{x+y}$. Укажите однородный многочлен, которому f эквивалентна в окрестности точки **1)** $(0,0)$; **2)** $(1,1)$.

Задача 12. Пусть $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$. Приведите f в окрестности точки $(0,0)$ к морсовскому виду (т.е. укажите квадратичную форму, которой f эквивалентна в окрестности точки $(0,0)$ и укажите диффеоморфизм, осуществляющий эту эквивалентность).