7. Условный экстремум

Задача 1. Исследуйте следующие функции f на условный экстремум методом множителей Лагранжа. В пп. 1–5 рекомендуется нарисовать линии уровня функции f, кривую, на которой f исследуется на экстремум, и отметить точки, в которых эта кривая касается линий уровня f.
1) $x^2 + y^2$ при $xy = 1$;
2) xy при $x^2 + y^2 = 1$;
3) xy при $x^3 + y^3 - 2xy = 0$;
4) xy при $2x^2 + 8y^2 - x^2y^2 = 0$;
5) $x^2 + 4y^2$ при $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) - 1$;
6) $x + y + z$ при $1/x + 4/y + 9/z = 1$;
7) $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задача 2. Найдите n-мерный параллелепипед максимального объема с заданным периметром a.

Задача 3. Найдите треугольник заданного периметра, который при вращении около одной из сторон образует тело наибольшего объема.

Задача 4. Около прямоугольного параллелепипеда со сторонами $2a$, $2b$ и $2c$ опишите эллипсоид наименьшего объема.

Задача 5. Найдите экстремумы функции $f(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.

Задача 6. 1) Найдите максимум функции $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p = 1 \quad (p > 1)$. (*Подсказка*: чтобы ответ выглядел красиво, введите такое число q, что $1/p + 1/q = 1$.)
2) (*Неравенство Гёльдера*). Пусть $p > 1$ и $1/p + 1/q = 1$. Докажите, что

$$\Bigl|\sum_i x_i y_i\Bigr| \leqslant \Bigl(\sum_i |x_i|^p\Bigr)^{1/p} \Bigl(\sum_i |y_i|^q\Bigr)^{1/q}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Задача 7. (*Неравенство Минковского*). Пусть $p \geqslant 1$. Докажите, что

$$\Bigl(\sum_i |x_i + y_i|^p\Bigr)^{1/p} \leqslant \Bigl(\sum_i |x_i|^p\Bigr)^{1/p} + \Bigl(\sum_i |y_i|^p\Bigr)^{1/p}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Замечание. Из неравенства Минковского следует, что функция $x \mapsto \|x\|_p = \Bigl(\sum_i |x_i|^p\Bigr)^{1/p}$ является нормой на $\mathbb{R}^n$ при всех $p \geqslant 1$.

Задача 8. (*Неравенство Коши*). Докажите, что $\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ при $x_i \geqslant 0$.

Задача 9. Исследуйте на экстремум квадратичную форму $\sum a_{ij}x_ix_j$ (где $a_{ij} = a_{ji}$) при $\sum x_i^2 = 1$.

Задача 10. Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0\ \forall i = 1, \dots, m\}$, причем $\mathrm{rk}_x(f_1, \dots, f_m) = m$ при $x \in M$ (так что M — подмногообразие в $\mathbb{R}^n$). Пусть f — гладкая функция, $L(x) = f(x) - \sum_i \lambda_i f_i(x)$ — соответствующая функция Лагранжа, и $dL(x_0) = 0$ в некоторой точке $x_0 \in M$. Предположим, что гессиан $H_L(x_0) \colon T_{x_0}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принимает значения разных знаков. Может ли ограничение f на M иметь экстремум в точке x_0?

Определение. Пусть E, F — нормированные пространства над $\mathbb{R}$ (т.е. векторные пространства над $\mathbb{R}$, снабженные нормами; см. листок 2). Линейный оператор $T \colon E \to F$ называется *ограниченным*, если существует такое $C \geqslant 0$, что $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in E$. Наименьшее C с таким свойством называется *нормой* T и обозначается через $\|T\|$.

Задача 11. Докажите, что любой линейный оператор между конечномерными нормированными пространствами ограничен.

Задача 12. Обозначим через $\mathbb{R}^n_p$ пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное нормой $\|\cdot\|_p$ (см. замечание после задачи 7); при $p = \infty$ полагаем $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Пусть $T \colon \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_q$ — линейный оператор. Придумайте способ, позволяющий находить норму T в следующих случаях: **1)** $p = 1$, q любое; **2)** $q = \infty$, p любое; **3)** $p = q = 2$.