8. Интеграл и мера

Задача 1. Докажите, что для $f \in C[a,b]$ определения интеграла по $[a,b]$ из этого и прошлого семестров (см. лекции) эквивалентны.

Определение 1. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — функция на ограниченном подмножестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Положим

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{при } x \notin E. \end{cases}$$

Функция f называется *интегрируемой* на E, если существует такой брусок $I \supset E$, что $\tilde{f}$ интегрируема на I. При этом полагают $\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_I \tilde{f}(x)\,dx$.

Задача 2. Докажите, что это определение не зависит от I.

Задача 3. Пусть $\varphi_1, \varphi_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции, причем $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ для всех x. Положим $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$. Докажите, что если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна, то она интегрируема на E, и

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Задача 4. Вычислите интеграл от функции f по множеству E:
1) $f(x,y) = e^{-y^2}$, E ограничено отрезками прямых $x=0$, $y=1$ и $y=x$.
2) $f(x,y) = x^2y^2$, E ограничено отрезками прямых $x=y$, $x=2y$ и отрезком кривой $xy=1$.
3) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, E ограничено поверхностями $z=xy$, $y=x$, $x=1$ и $z=0$.
4) $f(x,y) = [x+y]$, $E = [0,2] \times [0,2]$.

Определение 2. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если функция $f \equiv 1$ интегрируема на E. При этом величина $\mathrm{Vol}_n(E) = \int_E 1\,dx$ называется *n-мерным объемом* или *мерой Жордана* E.

Задача 5. Найдите объемы следующих тел:
1) внутренность эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$;
2) полноторие, полученное вращением круга $x^2 + (y-R)^2 \leqslant r^2$ $(r < R)$ вокруг оси Ox;
3*) шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R. (*Указание*: сначала покажите, что искомый объем равен c_nR^n для некоторой константы c_n.)

Задача 6. Пусть $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 1,\ x^2+y^2 \leqslant z\}$. Найдите: **1)** объем V; **2)** центр масс V; **3)** моменты инерции V относительно координатных осей (предполагается, что плотность V равна 1).

Замечание. Координаты центра масс (x_0, y_0, z_0) тела $V \subset \mathbb{R}^3$ с плотностью ρ вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint_V x\rho\,dxdydz, \quad \text{где } M = \iiint_V \rho\,dxdydz \text{ — масса тела}$$

(для y_0 и z_0 формулы аналогичны). Момент инерции V относительно прямой ℓ вычисляется по формуле

$$I_\ell = \iiint_V r^2 \rho \, dxdydz,$$

где $r(x,y,z)$ — расстояние от точки (x,y,z) до прямой ℓ.

Задача 7. Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ — трехмерное тело, I_1, I_2, I_3 — его моменты инерции относительно трех координатных осей. Докажите, что $I_1 \leqslant I_2 + I_3$, $I_2 \leqslant I_1 + I_3$ и $I_3 \leqslant I_1 + I_2$. Когда достигается равенство?

Задача 8. (*Теорема Штейнера*). Пусть I_0 — момент инерции тела V относительно некоторой оси ℓ_0, проходящей через центр масс V, ℓ — ось, параллельная ℓ_0 и находящаяся на расстоянии r от нее. Тогда момент инерции V относительно оси ℓ равен $I = I_0 + mr^2$ (где m — масса тела V).

Задача 9. Приведите пример ограниченной неинтегрируемой функции на отрезке.

Задача 10. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — множество нулевой меры. Докажите, что его дополнение плотно в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. Говорят, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет *нулевой объем*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется конечное покрытие $E \subset \bigcup_{i=1}^N I_i$ брусками, такое, что $\sum_{i=1}^N \mathrm{Vol}(I_i) < \varepsilon$.

Задача 11. 1) Пусть множество ограничено и имеет нулевую меру. Следует ли отсюда, что оно имеет нулевой объем?
2) Докажите, что для компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ ответ на предыдущий вопрос положителен.

Задача 12. Докажите, что объединение счетного числа множеств нулевой меры есть множество нулевой меры. Верно ли аналогичное утверждение о множествах нулевого объема?

Задача 13. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на открытом или замкнутом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что ее график Γ_f имеет $(n+1)$-мерную меру 0.

Задача 14. Докажите, что если E имеет нулевой объем, то и ∂E тоже имеет нулевой объем. Верно ли аналогичное утверждение, если «нулевой объем» заменить на «нулевую меру»?

Задача 15. Пусть E — ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что E измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда его граница ∂E имеет нулевой объем.

Задача 16. Докажите, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет нулевой объем (в смысле определения 3) тогда и только тогда, когда оно измеримо по Жордану и $\int_E 1\, dx = 0$ (так что определения 2 и 3 согласованы).

Задача 17. Покажите, что произведение двух интегрируемых на бруске функций является интегрируемой функцией.

Задача 18. Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ — интегрируемая функция на бруске $I = I^u \times I^v$. Докажите, что интеграл $\int\limits_{I^v} f(u,v)\, dv$ существует для почти всех $u \in I^u$.