9. Несобственные интегралы. Замена переменной

Задача 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$. Предположим, что для некоторого исчерпания E измеримыми (по Жордану) множествами $\{E_n\}$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,dx$. Докажите, что f интегрируема (в несобственном смысле).

Задача 2. При каких $p \in \mathbb{R}$ существует несобственный интеграл $\int_D x^p\,dx$?
1) $D = [1, +\infty)$; **2)** $D = [0, 1]$; **3)** $D = [-1, 1]$ $(p \in \mathbb{Z})$; **4)** $D = \mathbb{R}$ $(p \in \mathbb{Z})$.

Задача 3. При каких $p, q \in \mathbb{R}$ существует несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$?

Задача 4. Существуют ли несобственные интегралы

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx \quad \text{и/или} \quad \int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos x\,dx\ ?$$

Если да, то найдите их. (*Указание*: чтобы их найти, полезно их сложить.)

Задача 5. Пусть $f \in C[0, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{T\to\infty} \int_0^T f\,dx$. Следует ли отсюда, что f интегрируема (в несобственном смысле)?

Предостережение. Довольно часто существование предела из предыдущего упражнения принимают в качестве *определения* интегрируемости в несобственном смысле (для непрерывных функций на $[0, +\infty)$). Поэтому смысл предыдущего упражнения — выяснить, эквивалентно ли это определение тому, которое было на лекции.

Задача 6. (*свойства меры Жордана*). Докажите следующие утверждения:
1) Если $A, B \subset \mathbb{R}^n$ измеримы по Жордану, то таковы же и $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$.
2) Если $A, B \subset \mathbb{R}^n$ измеримы по Жордану, то $\mathrm{Vol}(A \cup B) = \mathrm{Vol}(A) + \mathrm{Vol}(B) - \mathrm{Vol}(A \cap B)$.
3) Если $A = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, причем все A_i и A измеримы по Жордану, то $\mathrm{Vol}(A) = \sum_i \mathrm{Vol}(A_i)$.
4) Если $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ и $A = \bigcup A_i$, причем все A_i и A измеримы по Жордану, то $\mathrm{Vol}(A) = \lim_i \mathrm{Vol}(A_i)$.
5) Если $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $A = \bigcap A_i$, причем все A_i и A измеримы по Жордану, то $\mathrm{Vol}(A) = \lim_i \mathrm{Vol}(A_i)$.

Задача 7. (*Корректность определения несобственного интеграла*). Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану, и $f\colon E \to \mathbb{R}$ ограничена и интегрируема в обычном смысле. Докажите, что f интегрируема в несобственном смысле, и обычный интеграл совпадает с несобственным.

Задача 8. **1)** Пусть $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ интегрируемы и ограничены. Докажите, что fg интегрируема.
2) Верно ли это без предположения об ограниченности f и g?

Задача 9. Пусть $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$, $E = E_1 \cup E_2$, причем $\mathrm{Vol}_n(E_1 \cap E_2) = 0$. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ интегрируема на E_1 и на E_2. Докажите, что f интегрируема на E, и

$$\int_E f\,dx = \int_{E_1} f\,dx + \int_{E_2} f\,dx.$$

Задача 10. Решите задачу 4, п.2 с прошлого занятия при помощи замены переменных.

Задача 11. Найдите площади фигур, ограниченных кривыми:
1) $x + y = a,\ x + y = b,\ y = \alpha x,\ y = \beta x\ (a, b, \alpha, \beta > 0)$; **2)** $(x - y)^2 + x^2 = a^2$; **3)** $x^3 + y^3 - axy = 0 \quad (a > 0)$; **4)** $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2) \quad (a > 0)$.

Задача 12. Вычислите массу огурца $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqslant 1\}$ с плотностью $\rho(x, y, z) = \exp\sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2}$.

Задача 13. **1)** Найдите $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$.

2) Найдите $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$.

Задача 14. (Домашнее задание). **1)** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^1, $A \subset U$ — множество меры 0. Докажите, что тогда и $f(A)$ — множество меры 0.
2) Докажите, что формула замены переменной в интеграле справедлива для интегрируемых (но не обязательно непрерывных) функций с компактным носителем.
3) Сформулируйте и докажите теорему о замене переменной в интеграле для функций с произвольным (не обязательно компактным) носителем.
4) Сформулируйте и докажите теорему о замене переменной в интеграле для случая, когда отображение φ, осуществляющее замену переменной, является диффеоморфизмом по модулю множеств меры 0.
5) Сформулируйте и докажите теорему о замене переменной в несобственном интеграле.