Экзамен

Задача 1. Эллиптические координаты (ρ, ψ) связаны с декартовыми (x, y) формулами $x = a\rho\cos\psi,\ \ y = b\rho\sin\psi$ (a, b — константы). Найдите якобиан перехода от полярных координат (r, φ) к эллиптическим как функцию полярных координат. [Напоминание: якобиан — это определитель матрицы Якоби.]

Задача 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y, z) = y^2 - x^2 + x^4 + 3z^2$ в полушарии $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9,\ z \geqslant 0\}$.

Задача 3. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $\varphi \in C^\infty(U)$ — *однородная функция* степени $\lambda \in \mathbb{R}$ (это означает, что $\varphi(tx) = t^\lambda \varphi(x)$ для всех $x \in U$ и $t > 0$ таких, что $tx \in U$).
1) Докажите, что для всех $x \in U$ и всех $p \in \mathbb{N}$ справедлива формула (по поводу мультииндексных обозначений см. листок 3)

$$\sum_{|\alpha|=p} \frac{D^\alpha \varphi(x)}{\alpha!}\, x^\alpha = C_p \varphi(x),$$

где C_p — некоторая константа. Найдите ее.
2) Докажите, что если $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda \in \mathbb{N}$, то φ — однородный многочлен степени λ.

Задача 4. 1) Пусть f — ограниченная неотрицательная невозрастающая функция на $[0, +\infty)$. Докажите, что несобственные интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} |\sin x| f(x)\, dx$$

существуют или не существуют одновременно.
2) Покажите, что двумерный аналог этого утверждения неверен на примере интегралов

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx\, dy}{e^{xy}\ln(x + y + 2)} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin x||\sin y|}{e^{xy}\ln(x + y + 2)}\, dx\, dy$$

(докажите, что один из них существует, а другой — нет).

Задача 5. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ — гомоморфизм алгебр (т.е. линейный функционал, удовлетворяющий условию $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для всех a, b), не равный тождественно нулю. Докажите, что существует такая точка $a \in U$, что $\varphi(f) = f(a)$ для всех $f \in C^\infty(U)$ **1)** для выпуклого U; **2)** для произвольного U.

Задача 6. Пусть $\sum \theta_n$ — сходящийся ряд, $\theta_n > 0$. Докажите, что множество

$$\Big\{x \in (0, 1) : \big|x - \frac{p}{q}\big| < \frac{\theta_q}{q} \text{ для бесконечного множества пар } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\Big\}$$

имеет нулевую меру.

Задача 7. Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon K \to K$ — отображение, удовлетворяющее условию $d(\varphi(x), \varphi(y)) \geqslant d(x, y)$ для всех $x, y \in K$.
1) Докажите, что для каждого $x \in K$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что $d(x, \varphi^k(x)) < \varepsilon$.
2) Докажите, что φ изометрично и сюръективно.