Повторный экзамен

Задача 1. Даны функции $f(x,y,z) = x^2yz^3$ и $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 7xyz$.
1) Найдите $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)$, если x, y — независимые переменные, а $z = z(x,y)$ задана неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$.
2) Найдите $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)$, если x, z — независимые переменные, а $y = y(x,z)$ задана неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$.

Задача 2. Пусть S — поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная уравнением $z = f(x,y)$, где $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
1) Предположим, что в некоторой точке (x_0, y_0) выполнено неравенство $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$. Докажите, что в некоторой окрестности точки $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ поверхность S и ее касательная плоскость в P имеют лишь одну общую точку.
2) Что можно сказать о взаимном расположении S и касательной плоскости к S в точке P, если в (x_0, y_0) выполнено противоположное неравенство $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0$?

Задача 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y,z,u) = xyz + xyu + xzu + yzu$ на торе $\{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = z^2 + u^2 = 1\}$.

Задача 4. Пусть Γ — граница ортогональной проекции на плоскость Oxy поверхности в $\mathbb{R}^3$, заданной уравнением

$$x^8 + y^8 + z^8 - 2xyz^4 = a.$$

1) При каких $a \in \mathbb{R}$ кривая Γ касается окружности $x^2 + y^2 = 4$? Нарисуйте Γ для таких a.
2) Найдите радиус окружности $x^2 + y^2 = R^2$, касающейся Γ при $a = 0$, и нарисуйте соответствующую Γ.

Задача 5. При каких $\alpha \in [-1,1]$ сходится интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$? Вычислите его.

Задача 6. Пусть A — положительно определенная 4×4-матрица. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_E e^{(Ax,x)}\,dx$, где $E = \{x \in \mathbb{R}^4 : (Ax,x) \leqslant 1\}$.

Задача 7. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^1, причем $\|df(x)\| < 1$ для всех $x \in U$. Положим $g(x) = x + f(x)$. Докажите, что $g(U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$ и что $g\colon U \to g(U)$ — диффеоморфизм.