ЛИСТОК 1

1. Пусть $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — вещественно-линейное отображение.

a) Докажите, что существуют однозначно определенные $a, b \in \mathbb{C}$, для которых $A(z) = az + b\overline{z}$.

b) Выразите определитель отображения $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ через $a, b \in \mathbb{C}$.

2. Докажите формулу Коши–Адамара

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$$

для радиуса сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$.

3. Пусть функция $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ есть сумма степенного ряда (с ненулевым радиусом сходимости). Докажите, что если $|f(z)|$ достигает локального максимума в точке $z = 0$, то $f(z) \equiv c_0$.

4. Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ сходится в точке $z = 1$. Докажите, что

a) ряд сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$ (теорема Абеля);

b) ряд сходится равномерно в секторе

$$\{\arg(z-1) \in [\pi - \alpha, \pi + \alpha],\ |z-1| \leq \cos\alpha\}$$

для любого $\alpha \in [0, \pi/2)$.

5. Для каждого из следующих свойств приведите пример удовлетворяющего ему степенного ряда $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ с радиусом сходимости $R = 1$.

a) Ряд расходится всюду на окружности $\{|z| = 1\}$.

b) Ряд сходится в некоторых, но не во всех точках окружности $\{|z| = 1\}$.

c) Сумма ряда непрерывна на $\{|z| = 1\}$.

d) Сумма ряда принадлежит классу C^k, но не принадлежит классу C^{k+1} на $\{|z| = 1\}$.

e) Сумма ряда принадлежит классу C^∞ на $\{|z| = 1\}$.

f*) Сумма ряда принадлежит классу C^∞ на $\{|z| = 1\}$ и ряд Тейлора функции $t \mapsto \sum\limits_{n\geq 0} c_n e^{int}$ имеет нулевой радиус сходимости в любой точке $t \in [0, 2\pi]$.