ЛИСТОК 2

1. Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ — целая функция.

a) Если $|f(z)| < M(\log|z|)^N$ при $|z| > e$ для некоторых $M > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, то функция f постоянна.

b) Если $|f(z)| < M|z|^N$ при $|z| > 1$ для некоторых $M > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, то функция f — многочлен степени не выше N.

2. Пусть функция f голоморфна в окрестности замкнутого круга $\overline{\Delta} = \{|z| \leq 1\}$.

a) $f(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta$ (теорема о среднем).

b) $f(0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\overline{\Delta}} f(x+iy)\, dxdy$ (еще одна теорема о среднем).

c) $|f(0)| \leq \pi^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\overline{\Delta})}$ для любого $p \geq 1$, где $\|f\|_{L^p(\overline{\Delta})} := \left(\int\limits_{\overline{\Delta}} |f|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$.

d) Как изменятся утверждения a)–c), если вместо единичного круга взять круг радиуса $r > 0$?

3. Пусть функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ голоморфна в единичном круге $\Delta = \{|z| < 1\}$. Докажите, что

$$\|f\|^2_{L^2(\Delta)} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1}.$$

4. Пусть функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ голоморфна в круге $\Delta = \{|z| < 1\}$ и диффеоморфно отображает Δ на область $D \subset \mathbb{C}$. Докажите формулу

$$\mathrm{Area}(D) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2.$$

5. Пусть $f \in C^1(\partial\Delta)$ — комплекснозначная функция класса C^1 на единичной окружности.

a) Если $f = \widetilde{f}|_{\partial\Delta}$, где $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\Delta) \cap C^0(\overline{\Delta})$, то $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0$ при $z \notin \overline{\Delta}$.

b) Для любого $\theta \in [0, 2\pi)$ существуют радиальные пределы

$$\lim_{r\to 1\pm} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - re^{i\theta}} =: f_{\pm}(e^{i\theta}).$$

c) $f(e^{i\theta}) = f_-(e^{i\theta}) - f_+(e^{i\theta})$ (Формула Сохоцкого.)

d) Приведите пример функции f, для которой $f_{\pm}$ различны и отличны от нуля всюду на единичной окружности.