ЛИСТОК 3

1. Приведите пример степенного ряда, который расходится всюду на границе своего круга сходимости, а его сумма голоморфно продолжается во все граничные точки этого круга кроме одной. Может ли сумма степенного ряда голоморфно продолжаться во все граничные точки его круга сходимости?

2. Докажите, что сумма ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$ голоморфна в единичном круге и не продолжается голоморфно ни в одну точку единичной окружности.

3*. Докажите, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$ дает решение задачи 5 f) из Листка 1.

4. Пусть D — область с гладкой границей и $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\overline{D})$. Докажите, что если функция f тождественно равна нулю на непустой дуге границы ∂D, то она тождественно равна нулю в D.

5. Пусть функция f голоморфна в кольце $\{r < |z-z_0| < R\}$, где $0 \le r < R \le \infty$. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ определим *n-ый коэффициент Лорана* функции f формулой

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta,$$

где $\rho \in (r, R)$ и окружность $\{|\zeta - z_0| = \rho\}$ ориентирована как граница диска с центром в точке z_0. Докажите, что c_n не зависит от ρ, а ряд Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится к функции f абсолютно и равномерно на компактных подмножествах кольца $\{r < |z - z_0| < R\}$.

6. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ — разложение в ряд Лорана функции f, голоморфной в проколотом круге $\{0 < |z - z_0| < R\}$.

a) Функция f голоморфно продолжается в точку z_0 тогда и только тогда, когда $c_n = 0$ для всех $n < 0$.

b) Функция f имеет существенную особенность в точке z_0 тогда и только тогда, когда отлично от нуля бесконечное число коэффициентов c_n с отрицательными номерами.

7. Пусть функция f голоморфна в проколотом круге $\Delta^* = \{0 < |z| < 1\}$.

a) Если $f \in L^2(\Delta^*)$, то f голоморфно продолжается в точку $z = 0$.

b) Верно ли утверждение (a), если $f \in L^p(\Delta^*)$ для некоторого $p \in [1, 2)$?