# ЛИСТОК 4

**1.** Докажите, что не существует голоморфной в проколотом круге функции $f$, для которой $f(z)^2 = z$ при всех $z \in \Delta^*$.

**2.** Пусть функция $f$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и $f(x) = x^x$ при $x \in (0, +\infty)$. Вычислите значение $f(i)$.

**3.** Пусть $f \in \mathcal{O}(U)$ и ${}_{z_0}\mathbf{F} \in \mathcal{O}_{z_0}$, $z_0 \in U$, — росток первообразной функции $f$ (т. е. $F'(z) = f(z)$ в некоторой окрестности точки $z_0$). Докажите, что росток ${}_{z_0}\mathbf{F}$ продолжается вдоль любого пути в $U$.

**4.** Пусть функция $f$ голоморфна в односвязной области $U$ и не имеет нулей. Докажите, что существует такая голоморфная в $U$ функция $g$, что $e^{g(z)} = f(z)$ при всех $z \in U$.

**5.** Пусть функция $f$ голоморфна в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{ord}_a f = k \geq 1$. Докажите, что в окрестности точки $a$ существует такая однолистная функция $g$, что $f(z) = g(z)^k$.

**6.** Пусть росток $\mathbf{f} \in \mathcal{O}_{z_0}$, $z_0 \neq 0$, продолжается по любому пути в $\mathbb{C} \setminus 0$ и для любого из этих продолжений выполнено $|f(z)| < 1$. Докажите, что $\mathbf{f}$ — росток постоянной функции.

**7.** Опишите аналитическое продолжение функций, заданных формулами:

a) $\sqrt[n]{z}$, $n \geq 2$

b) $\sqrt{z^2}$ и $\left(\sqrt{z}\right)^2$

c) $\ln \sin z$

d) $\ln \ln z$

e) $\sqrt{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)}$, $n \geq 2$

f) $\sqrt{1 + \sqrt{z-1}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{z}} - \sqrt{2}}$