ЛИСТОК 5

1. Пусть функция $f \in \mathcal{O}(U - \{a\})$ имеет в точке $a \in U$ полюс порядка $n \geq 1$ (т. е. $\mathrm{ord}_a f = -n$). Докажите формулу

$$\mathrm{res}_a f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \Big((z-a)^n f(z) \Big)^{(n-1)},$$

где $g^{(k)}$ обозначает k-ую производную функции g.

2. Пусть $R = R(z, w)$ — рациональная функция двух переменных, не имеющая особенностей на окружности $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Докажите, что

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi \sum_{z_k \in \Delta} \mathrm{res}_{z_k} \frac{1}{z} R\Big(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\Big).$$

3. Пусть $R = R(z)$ — рациональная функция без полюсов на действительной оси. Докажите, что если $\lim\limits_{z \to \infty} |zR(z)| = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_k > 0} \mathrm{res}_{z_k} R(z).$$

4. Пусть функция f голоморфна в замкнутой верхней полуплоскости за исключением конечного множества $\{z_k \mid \mathrm{Im}\, z_k > 0\}$. Если $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_k \mathrm{res}_{z_k} f(z) e^{i\lambda z}$$

для любого $\lambda > 0$. Верна ли эта формула при $\lambda \leq 0$?

5. Вычислите интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\, dx.$$

6. Вычислите интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2}\, dx.$$