# ЛИСТОК 6

**1.** Пусть $f \in \mathcal{O}(\Delta^*)$ и логарифмическая производная $\dfrac{f'}{f}$ имеет в нуле полюс первого порядка. Докажите, что $f$ имеет в нуле либо нуль, либо полюс.

**2.** Пусть функция $f$ мероморфна в окрестности замыкания $\overline{D}$ области с гладкой границей и не имеет ни нулей, ни полюсов на $\partial D$. Докажите, что для любой голоморфной в окрестности $\overline{D}$ функции $g$ имеет место равенство

$$\sum_{a \in D} g(a) \operatorname{ord}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} g \, \frac{f'}{f} \, dz.$$

**3.** Докажите основную теорему алгебры: каждый комплексный многочлен степени $n$ имеет ровно $n$ корней в $\mathbb{C}$.

**4.** Пусть $P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Докажите, что

$$\max_{|z| \leq 1} |P(z)| \geq 1,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $P(z) \equiv z^n$.

**5.** Пусть функция $f$ голоморфна в ограниченной области $U$ и непрерывна в замыкании этой области. Если $|f(z)| \equiv 1$ при $z \in \partial U$, то функция $f$ либо имеет нуль в $U$, либо постоянна в $U$.

**6.** Пусть функции $f_1, \ldots, f_n$ голоморфны в ограниченной области $U$ и непрерывны в замыкании этой области. Докажите, что функция $|f_1| + \cdots + |f_n|$ достигает максимума на $\partial U$.

**7.** Пусть $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ и $f(\Delta) \subseteq \Delta$. Докажите, что если уравнение $f(z) = z$ имеет два различных решения в $\Delta$, то $f(z) \equiv z$.

**8.** Пусть $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ ограничена по модулю единицей. Докажите, что $|f'(0)| \leq 1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $f(z) = e^{i\theta} z$. (*Указание*: Это еще один вариант леммы Шварца.)