ЛИСТОК 7

1. Пусть $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ — однолистная функция. Докажите, что

$$\operatorname{Area}(f(\Delta)) \geq \pi |f'(0)|^2,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда f линейна.

2. Укажите конформные отображения единичного круга на следующие области:

а) $H := \{\operatorname{Im} z > 0\}$

б) $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$

3. Найдите прообраз метрики Лобачевского $\rho = 4\dfrac{dz\, d\overline{z}}{(1-|z|^2)^2}$ при конформном отображении верхней полуплоскости на единичный круг.

4. Докажите, что *функция Кёбе* $\psi(z) = \dfrac{-z}{(1-z)^2}$ однолистно отображает единичный круг Δ на область $\mathbb{C} \setminus [\frac{1}{4}, +\infty)$. Вычислите разложение ψ в ряд Тейлора в точке нуль.

5. Пусть $U \subsetneq \mathbb{C}$ — односвязная область и $a \in U$. Докажите, что $\sup |f'(a)|$ по *всем* голоморфным в U функциям, ограниченным по модулю единицей, достигается на конформном отображении U на единичный круг, переводящем точку a в нуль. (*Указание*: См. задачу 8 из листка 6.)

6. Напомним, что аналитической емкостью компакта $K \Subset \mathbb{C}$ называется число

$$\gamma(K) = \sup |c_{-1}(f)|,$$

где $c_{-1}(f) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} f(z)\, dz$, а верхняя грань берется по всем $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$, ограниченным по модулю единицей и стремящимся к нулю при $z \to \infty$.

а) Пусть функция f голоморфна и ограничена вне круга радиуса r. Докажите, что функция $g(w) := f(\frac{1}{w})$ голоморфна в круге радиуса $1/r$ и $g'(0) = c_{-1}(f)$.

б) Выведите из задачи 5, что $\gamma([0,1]) = |\varphi'(0)|$, где φ — конформное отображение области $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ на единичный круг с $\varphi(0) = 0$.

в) Выведите из задачи 4, что $\gamma([0,1]) = \frac{1}{4}$.

г) Предъявите ограниченную голоморфную функцию в $\mathbb{C} \setminus [0,1]$, не продолжающуюся голоморфно ни в одну точку отрезка $[0,1]$.