ЛИСТОК 8

1. Приведите пример функции $f \in \mathcal{O}(\Delta)$, ограниченной по модулю единицей и не продолжающейся непрерывно на $\overline{\Delta}$.

2. Докажите, что если два кольца $\{r_1 < |z| < R_1\}$ и $\{r_2 < |z| < R_2\}$ биголоморфны, то $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$.

3. Пусть U — ограниченная односвязная область с простой границей и $a, b, c \in \partial U$ — три попарно различные точки. Докажите, что существует единственное конформное отображение U на единичный круг, продолжение которого на замыкание U переводит точки a, b, c в три наперед заданные попарно различные точки на единичной окружности.

4. Функция вещественного переменного называется вещественно-аналитической, если она принадлежит классу C^∞ и ее ряд Тейлора в любой точке сходится к ней в некоторой окрестности этой точки. Гладкая кривая $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [0, 1]$, называется вещественно-аналитической, если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — вещественно-аналитические.

а) Докажите, что для каждой точки гладкой вещественно-аналитической кривой γ найдутся окрестность U и однолистная функция $\varphi \in \mathcal{O}(U)$, отображающая кривую $\gamma \cap U$ на интервал $(0, 1)$.

б) Пусть U_1 и U_2 — ограниченные области с гладкими вещественно-аналитическими границами. Докажите, что всякое биголоморфное отображение $f : U_1 \to U_2$ продолжается до биголоморфного отображения окрестности замыкания области U_1 на окрестность замыкания области U_2.

в) Приведите пример, показывающий, что возникающие в пункте (б) окрестности зависят от отображения f.

5. Пусть U — ограниченная область с гладкой границей и $f \in \mathcal{O}(U) \cap C^0(\overline{U})$ гомеоморфно отображает границу области U на единичную окружность. Докажите, что f биголоморфно отображает U на единичный круг. (Указание: воспользуйтесь «принципом аргумента».)

6. Пусть $H = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ — это верхняя полуплоскость и $f \in \mathcal{O}(H) \cap C^0(\overline{H})$ гомеоморфно отображает вещественную ось на себя с сохранением ориентации. Верно ли, что f биголоморфно отображает H на себя?