4. Комплексные поверхности, лекция 4: Поверхности с четным b_1 и метрики Годушона

В этой лекции (M, ω) - комплексное эрмитово многообразие, обыкновенно поверхность, а $\omega \in \Lambda^{1,1}(M)$ его эрмитова форма. Излагаемые результаты довольно общеизвестные, см. например [BPV]. Мне удалось избежать применения спектральной последовательности Фрелихера (она же Дольбо); со спектральными последовательностями то же самое доказывается несколько проще. Введение в эрмитову геометрию и топологию поверхностей (автодуальные, антиавтодуальные формы и так далее) - Бессе, "Четырехмерная риманова геометрия".

4.1. Примитивные и автодуальные формы на поверхности

Напомню, что 2-форма η на четырехмерном, ориентированном римановом многообразии называется **автодуальной**, если $*\eta = \eta$, и **антиавтодуальной**, если $*\eta = -\eta$. Легко проверить, что автодуальность равносильна условию $\eta \wedge \eta = |\eta|^2 \operatorname{Vol}$, где Vol - форма риманова обьема, а $|\eta|$ евклидова норма на 2-формах, индуцированная римановой структурой. Тот же аргумент показывает, что антиавтодуальность равносильна условию $\eta \wedge \eta = -|\eta|^2 \operatorname{Vol}$, и шестимерное расслоение 2-форм разбивается в прямую двух трехмерных подрасслоений, составленных из автодуальных и антиавтодуальных форм.

Определение 4.1. Пусть (M, ω) - комплексное эрмитово многообразие, $L_\omega : \Lambda^{p,q}(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1,q+1}(M)$ оператор внешнего умножения на ω, а $\Lambda_\omega = *L_\omega *$ – сопряженный оператор. Форма η называется **примитивной**, если $\Lambda_\omega(\eta) = 0$.

На комплексной поверхности, примитивная (1,1)-форма записывается довольно просто. Пусть $\xi_1, \xi_2 \in \Lambda^{1,0}(M)$ - ортонормированный базис. Тогда

$$\Lambda_\omega(\xi_1 \wedge \bar{\xi}_1) = 1, \quad \Lambda_\omega(\xi_2 \wedge \bar{\xi}_2) = 1, \Lambda_\omega(\xi_1 \wedge \bar{\xi}_2) = 0, \quad \Lambda_\omega(\xi_2 \wedge \bar{\xi}_1) = 0,$$

Из этого видно, что расслоение вещественных примитивных $(1,1)$-форм трехмерно, и порождено формами

$$\sqrt{-1}(\xi_1\wedge\bar\xi_1-\xi_2\wedge\bar\xi_2,)\ \ \xi_1\wedge\bar\xi_2-\sqrt{-1}\xi_2\wedge\bar\xi_1,\ \ \xi_2\wedge\bar\xi_1-\sqrt{-1}\xi_1\wedge\bar\xi_2.$$

Легко видеть, что эти формы антиавтодуальны, то есть удовлетворяют соотношению $*\eta=-\eta$, или, что равносильно,

$$\eta\wedge\eta=-(\eta,\eta)\operatorname{Vol}.$$

Мы получили следующее полезное утверждение.

Утверждение 4.2: Пусть M - комплексная эрмитова поверхность. 2-форма $\eta\in\Lambda^2(M)$ анти-автодуальна тогда и только тогда, когда она имеет тип $(1,1)$ и примитивна.

■

То же самое вычисление приводит к следующей формуле (соотношения Римана-Ходжа)

$$|\eta|^2=-\frac{\eta\wedge\eta}{\operatorname{Vol}}+2(\Lambda_\omega\eta)^2 \tag{4.1.1}$$

4.2. Когомологии $\mathcal{O}_M$ и метрика Годушона

Пусть (M,ω) – комплексное n-многообразие с метрикой Годушона, а $\alpha\in\Lambda^{0,1}(M)$ – $\bar\partial$-замкнутая 1-форма. Определим

$$\deg\alpha:=\frac{\int_M\partial\alpha\wedge\omega^{n-1}}{\int_M\omega^n}$$

Из формулы Стокса легко видеть, что $\int_M\partial\bar\partial f\wedge\omega^{n-1}=0$ для любой функции $f\in C^\infty M$ (докажите это, используя $\partial\bar\partial\omega^{n-1}=0$). Поэтому $\deg\alpha=0$, если α $\bar\partial$-точна. Мы получили, что deg задает функционал на группе когомологин $\bar\partial$, которая отождествляется с когомологиями $H^1(\mathcal{O}_M)$ структурного пучка M, потому что резольвента пучков

$$\mathcal{O}_M\ \stackrel{\bar\partial}{\longrightarrow}\ \Lambda^{0,1}(M)\ \stackrel{\bar\partial}{\longrightarrow}\ \Lambda^{0,2}(M)\ \stackrel{\bar\partial}{\longrightarrow}\ ...$$

ациклична.

Определение 4.3. Отображение $H^1(\mathcal{O}_M) \stackrel{\deg}{\longrightarrow} \mathbb{C}$ называется **степенью** класса когомологий.

Замечание 4.4. Напомню, что $(p,0)$-форма η называется **голоморфной**, если $\bar\partial\eta = 0$. $(0,p)$-форма η называется **антиголоморфной**, если $\bar\eta$ голоморфна. Степень замкнутой, антиголоморфной формы равна нулю. Согласно теории Ходжа, на кэлеровом многообразии каждый класс когомологий $H^1(\mathcal{O}_M)$ может быть представлен антиголоморфной, замкнутой формой. Поэтому для кэлерова многообразия отображение $H^1(\mathcal{O}_M) \stackrel{\deg}{\longrightarrow} \mathbb{C}$ равно нулю.

Замечание 4.5. Отображение

$$f \stackrel{D}{\longrightarrow} \frac{\partial\bar\partial f \wedge \omega^{n-1}}{\int_M \omega^n}$$

из функций в функции - эллиптический оператор второго порядка, зануляющийся на константах (проверьте это), и в силу теоремы, доказанной на прошлом занятии, коядро D одномерно (проверьте).

Замечание 4.6. Образ D тоже легко описать. Действительно, для каждой функции $f \in C^\infty M$, имеем

$$\int \partial\bar\partial f \wedge \omega^{n-1} = 0,$$

потому что $\partial\bar\partial(\wedge\omega^{n-1}) = 0$. Но коядро D одномерно, по формуле индекса. Значит, образ D - это множество всех функций g таких, что $\int_M g\omega^n = 0$.

Утверждение 4.7: Пусть (M,ω) – комплексное n-многообразие с метрикой Годушона. Для любого класса когомологий $[\alpha] \in H^1(\mathcal{O}_M)$, существует единственный представитель $\alpha \in \Lambda^{0,1}(M)$ такой, что

$$\partial\alpha \wedge \omega^{n-1} = \deg[\alpha]\omega^n. \tag{4.2.1}$$

Доказательство: Пусть $\alpha_0 \in \Lambda^{0,1}(M)$ – представитель $[\alpha]$. Решения (4.2.1) это формы вида $\alpha_0 + \bar\partial f$, удовлетворяющие

$$\partial\bar\partial f \wedge \omega^{n-1} = \deg[\alpha]\omega^n - \partial\alpha_0 \wedge \omega^{n-1}.$$

(проверьте это). В терминах оператора D, определенного выше, это можно переписать как

$$D(f) = \deg[\alpha] - \frac{\partial\alpha_0 \wedge \omega^{n-1}}{\int_M \omega^n}. \tag{4.2.2}$$

Единственность решения следует сразу из того, что ядро D это константы. Существование f тоже легко проверить. Как следует из предыдущего замечения, уравнение $D(f) = g$ имеет решение f, если $\int_M g\omega^n = 0$. Левая сторона уравнения (4.2.2) после интегрирования дает

$$\int_M \deg[\alpha]\omega^n - \int_M \partial\alpha_0 \wedge \omega^{n-1} = 0.$$

■

Следствие 4.8: Пусть (M, ω) - комплексная поверхность с метрикой Годушона, а $[\alpha] \in H^1(\mathcal{O}_M)$ класс когомологий с $\deg[\alpha] = 0$. Тогда $[\alpha]$ представляется антиголоморфной формой.

Доказательство: Пусть $\alpha \in \Lambda^{0,1}(M)$ - представитель $[\alpha]$, который удовлетворяет $\partial\alpha \wedge \omega^{n-1} = 0$, $\bar\partial\alpha = 0$ (такой представитель существует в силу предыдущего утверждения). Тогда $\partial\alpha = d\alpha$ примитивная форма. Поскольку примитивные формы антиавтодуальны, имеем

$$0 = \int_M d\alpha \wedge d\bar\alpha = -\int_M |\Re(d\alpha)|^2 \operatorname{Vol}$$

значит, $d\alpha = 0$ всюду на M. ■

Замечание 4.9. Из этого утверждения сразу следует, что фактор

$$H^1(\mathcal{O}_M)/H^1_a(\mathcal{O}_M)$$

по пространству $H^1_a(\mathcal{O}_M)$ антиголоморфных замкнутых форм не более чем одномерный.

$(2,0)$-формы на поверхности всегда автодуальны (проверьте это). Используя то же соображение, что и в следствии выше, мы сразу получаем следующее полезное утверждение.

Замечание 4.10. На поверхности, голоморфные (и антиголоморфные) 1-формы обязательно замкнуты. Рассмотрим голоморфную 1-форму $\rho \in \Omega^1 M$. Тогда $d\rho$ это точная $(2,0)$-форма. Но $\int_M d\rho \wedge d\bar\rho = \int_M \operatorname{Vol} |d\rho|^2 = 0$, $d\rho = 0$ всюду на M.

4.3. Комплексные поверхности с четным $b_1(M)$ и голоморфные 1-формы

Лемма 4.11: Ненулевая линейная комбинация антиголоморфных и голоморфных 1-форм на компактной поверхности не может быть точна.

Доказательство: Действительно, пусть v такая линейная комбинация. Тогда $I(v)$ тоже линейная комбинация антиголоморфных и голоморфных 1-форм, и в силу замечания 4.10, $I(v)$ замкнуто. Если v точно, $v = d\phi$, мы имеем $0 = dd^c\phi$, где $d^c = -I \circ d \circ I$. С другой стороны, эллиптический оператор $\phi \longrightarrow \frac{dd^c\phi\wedge\omega}{\omega^2}$ зануляется на константах (проверьте эллиптичность), значит, имеет одномерное ядро, состоящее из констант, в силу доказанного в предыдущей лекции (почему?). Мы получили $\phi = const$. ■

Замечание 4.12. Из этого следует, что на компактной поверхности, естественное отображение

$$H^0(\Omega^1 M) \oplus \overline{H^0(\Omega^1 M)} \longrightarrow H^1(M)$$

из голоморфных плюс антиголоморфных форм в когомологии является вложением.

Замечание 4.13. Пусть v замкнутая 1-форма на компактном комплексном многообразии. Поскольку (1,0) и (0,1)-части v замкнуты относительно ∂ и $\bar\partial$ соответственно, можно говорить про классы когомологий $[v^{0,1}] \in H^1(\mathcal{O}_M)$ и $\overline{[v^{1,0}]} \in H^1(\mathcal{O}_M)$. Если эти два класса равны нулю, (0,1)-формы $v^{0,1}$ и $\overline{v^{1,0}}$ $\bar\partial$-точны. Это дает

$$v = \bar\partial\phi_1 + \partial\phi_2.$$

Поскольку v замкнуто, $dv = 0$ влечет $\partial\bar\partial(\phi_1 - \phi_2) = 0$. Из аргумента который доказывает предыдущую лемму, сразу следует, что $\phi_1 = \phi_2$ (проверьте это). Поэтому $V = d\phi_1$. Мы получили естественное вложение

$$H^1(M) \stackrel{j}{\hookrightarrow} H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}, \tag{4.3.1}$$

где $\overline{H^1(\mathcal{O}_M)}$ обозначает векторное пространство с сопряженной комплексной структурой.

Теорема 4.14: Пусть M - компактная комплексная поверхность. Тогда $b_1(M)$ четно, если $H^1(\mathcal{O}_M)$ порождено антиголоморфными 1-формами, и нечетно в противном случае.

Доказательство. Шаг 1: Выше были построены естественные вложения

$$H^0(\Omega^1 M) \oplus \overline{H^0(\Omega^1 M)} \hookrightarrow H^1(M) \stackrel{j}{\hookrightarrow} H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}.$$

Если $H^1(\mathcal{O}_M)$ порождено антиголоморфными 1-формами,

$$H^1(\mathcal{O}_M) = H^0(\Omega^1 M),$$

и эти вложения являются изоморфизмами.

Шаг 2: Напомним, что **степенью** замкнутой (1,1)-формы η на многообразии с метрикой Годушона называется число $\int_M \eta \wedge \omega^{n-1}$.

Применив дифференциал де Рама к $\bar\partial$-замкнутой $(0,1)$-форме α, получим точную $(1,1)$-форму $d\alpha = \partial\alpha$. На поверхности, факторпространство точных $(1,1)$-форм по $\partial\bar\partial$-точным не более чем одномерно, потому что точная $(1,1)$-форма нулевой степени равна $\partial\bar\partial\phi + v$, где v точно и примитивно (Замечание 4.5), а значит равно нулю.

Шаг 3: Пусть $[\alpha], [\beta] \in H^1(\mathcal{O}_M)$, $\deg[\alpha] = \overline{\deg[\beta]}$. Выберем их представители $\alpha, \beta \in \Lambda^{0,1}(M)$. Тогда $\eta := d(\alpha - \bar\beta)$ - точная (1,1)-форма нулевой степени (проверьте это), и в силу предыдущего шага, $\eta = \partial\bar\partial\phi$ (проверьте). Форма $\alpha - \bar\beta - \partial\phi$ замкнута, поскольку

$$d(\alpha - \bar\beta - \bar\partial\phi) = \eta - \partial\bar\partial\phi = 0,$$

Мы получаем $[\alpha] \oplus [\beta] = j(\alpha - \bar\beta - \bar\partial\phi)$, где $H^1(M) \stackrel{j}{\hookrightarrow} H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}$ - отображение, построенное в (4.3.1).

Шаг 4: Если группа $H^1(\mathcal{O}_M)$ не порождена антиголоморфными 1-формами, существуют классы $[\alpha], [\beta] \in H^1(\mathcal{O}_M)$, такие, что $\deg[\alpha] \neq \overline{\deg[\beta]}$, потому что из $\deg[\alpha] = 0$ следует, что $\alpha \in H^1_a(\mathcal{O}_M)$. На предыдущем шаге было доказано, что $j(H^1(M)) \subset H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}$ совпадает с $\ker \deg : \ H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)} \longrightarrow 0$, а поскольку это отображение нетривиально, мы получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow H^1(M) \ \stackrel{j}{\longrightarrow} \ H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)} \ \stackrel{\deg}{\longrightarrow} \ \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Поэтому $H^1(M)$ нечетна. ■

В доказательстве кэлеровости комплексных поверхностей с четным b_1, используется не сама четность, а следующее полезное свойство поверхностей с четным b_1.

Лемма 4.15: ($\partial\bar\partial$-лемма для поверхностей с четным b_1). Пусть M - компактная комплексная поверхность, с четным $b_1(M)$, а $\eta \in \Lambda^{1,1}(M)$ – точная (1,1)-форма. Тогда $\eta = \partial\bar\partial\psi$, для какой-то функции $\psi \in C^\infty M$.

Доказательство: Имеем $\eta = d\rho$, значит, $\eta = \partial\rho^{0,1} + \bar\partial\rho^{1,0}$, где $\rho^{1,0}$ и $\rho^{0,1}$ - $(1,0)$ и $(0,1)$-части. Поскольку η типа $(1,1)$, имеем

$$\partial\rho^{1,0} = \bar\partial\rho^{0,1} = 0.$$

В силу предыдущего следствия, ∂-замкнутая (1,0)-форма является суммой голоморфной и ∂-точной, а $\bar\partial$-замкнутая (0,1)-форма является суммой антиголоморфной и $\bar\partial$-точной. Отбросив антиголоморфные и голоморфные компоненты, которые не дают вклада в $\partial\rho^{0,1} + \bar\partial\rho^{1,0}$, получим

$$\rho^{1,0} = \partial\psi, \quad \rho^{0,1} = \bar\partial\phi,$$

а следовательно,

$$\eta = \partial\rho^{0,1} + \bar\partial\rho^{1,0} = \partial\bar\partial\phi - \partial\bar\partial\psi.$$

■

Замечание 4.16. Отметим, что такое же утверждение верно и для потоков: точный $(1,1)$-поток лежит в образе $\partial\bar\partial$. Это связано с тем, что когомологии Дольбо для потоков такие же, как для форм (докажите это).

Задачи.

Задача 4.1. Пусть V - евклидово пространство. Постройте естественный изоморфизм $\mathfrak{so}(V) \cong \Lambda^2(V)$, не пользуясь координатами.

Задача 4.2. Пусть V - четырехмерное евклидово пространство. Используя изоморфизм $\mathfrak{so}(V) \cong \Lambda^2(V)$ мы получаем естественное вложение $\Lambda^2(V) \stackrel{e}{\hookrightarrow} \operatorname{End}(V)$. Докажите, что ненулевая форма $\eta \in \Lambda^2(V)$ автодуальна тогда и только тогда, когда $e(\eta)^2 = a\,\mathsf{Id}_V$, где $a < 0$.

Задача 4.3. Докажите, что $SO(4) \cong SU(2) \times SU(2)/\{\pm 1\}$.

Задача 4.4. Пусть B – голоморфное, эрмитово векторное расслоение на компактном комплексном n-многообразии (M, ω) с метрикой Годушона, а Θ_B кривизна связности Черна на B. Определим

$$\deg B := \int_M \omega^{n-1} \wedge \Theta_B.$$

Докажите, что $\deg B$ не зависит от выбора метрики на B.

Задача 4.5. Пусть B – голоморфное, эрмитово векторное расслоение на компактной комплексной поверхности с метрикой Годушона, Θ_B кривизна связности Черна на B, а $B' \subset B$ голоморфное подрасслоение. Предположим, что форма Θ_B антиавтодуальна. Докажите, что $\deg B' \leqslant \deg B$, причем равенство достигается, только если $B = B' \oplus B''$ для какого-то голоморфного расслоения B''.

Задача 4.6. Пусть M комплексное многообразие, не обязательно компактное, а $H^1(M) \stackrel{j}{\longrightarrow} H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}$ отображение, построенное в Замечании 4.13. Предположим, что на M нет непостоянных голоморфных функций. Докажите, что j - вложение.

Задача 4.7. Пусть M - комплексное многообразие, $\operatorname{Pic}_0(M)$ - группа голоморфных линейных расслоений с тривиальным классом Черна, а $Fl(M) \subset \operatorname{Pic}_0(M)$ - группа линейных расслоений, которые допускают плоскую, унитарную связность. Постройте естественный изоморфизм между $\operatorname{Pic}_0(M)/Fl(M)$ и $H^1(\mathcal{O}_M)/H^1_a(\mathcal{O}_M)$, где $H^1_a(\mathcal{O}_M)$ - классы когомологий, представимые замкнутыми, антиголоморфными формами.

Задача 4.8. Пусть $m, n > 1$ - целые числа, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash 0$. Рассмотрим действие $\mathbb{C}$ на $V := (\mathbb{C}^n\backslash 0) \times (\mathbb{C}^m\backslash 0)$ $t(x, y) = (e^t x, e^{\alpha t} y)$. Для каких α фактор V по этому действию будет компактным многообразием?

Замечание 4.9. Такое многообразие называется **пространство Калаби-Экмана** (Calabi-Eckmann space).

Задача 4.10. Докажите, что пространство Калаби-Экмана гомеоморфно $S^{2n-1} \times S^{2m-1}$, и допускает голоморфное, гладкое отображение

$$M \longrightarrow \mathbb{C}P^{m-1} \times \mathbb{C}P^{n-1},$$

а слой этого отображения - эллиптическая кривая.

Задача 4.11. Пусть M - многообразие Калаби-Экмана. Найдите размерность $H^0(\Omega^1 M)$.

Замечание 4.12. Пусть (M, ω) - комплексное эрмитово многообразие. Напомним, что ω называется KT-метрикой (от слов Kähler torsion), если $\partial\bar\partial\omega = 0$.

Задача 4.13. Пусть (M, ω) - компактное, комплексное 3-многообразие с KT-метрикой. Докажите, что любая голоморфная 1-форма на M замкнута.

Задача 4.14. Пусть (M, ω) - компактное, комплексное 3-многообразие с эрмитовой метрикой, а α – примитивная (1,1)-форма на M. Докажите, что

$$\int_M \alpha \wedge \bar\alpha \wedge \omega = \mathsf{const} \int_M |\alpha|^2 \omega^3,$$

где const - отрицательная рациональная константа. Вычислите эту константу.

Задача 4.15. Пусть (M, ω) - компактное, комплексное 3-многообразие с KT-метрикой, а α - точная (1,1)-форма, причем $\alpha = \partial\beta$, где $\bar\partial\beta = 0$. Докажите, что

$$\int_M \alpha \wedge \bar\alpha \wedge \omega = 0.$$

Задача 4.16. Пусть α - точная, примитивная $(1,1)$-форма, причем $\alpha = \partial\beta$, где $\bar\partial\beta = 0$. Докажите, что $\alpha = 0$

Задача 4.17. Пусть (M, ω) - компактное, комплексное 3-многообразие с эрмитовой метрикой. Докажите, что дифференциальный оператор на функциях

$$D(\phi) = \frac{\partial\bar\partial\phi \wedge \omega^2}{\omega^3}$$

имеет одномерное коядро K.

Задача 4.18. Пусть (M, ω) - компактное, комплексное 3-многообразие с KT-метрикой, а $\nu \in \Lambda^{0,1}(M)$ $\bar\partial$-замкнутая $(0,1)$-форма. Определим $\deg\nu$ как образ $\kappa := \frac{\partial\nu\wedge\omega^2}{\omega^3}$ в $K = C^\infty(M)/\operatorname{im} D$. Докажите, что $\deg\nu$ не зависит от выбора представителя ν в его классе когомологий $[\nu] \in H^1(\mathcal{O}_M)$.

Задача 4.19. Пусть (M, ω) - компактное, комплексное 3-многообразие с КТ-метрикой, а $[\nu] \in H^1(\mathcal{O}_M)$ класс когомологий с $\deg[\nu] = 0$, Докажите, что класс $[\nu]$ может быть представлен антиголоморфной, замкнутой формой.

Указание 4.20. Решив уравнение $D(\phi) = \kappa$, докажите, что форма $\alpha := d(\nu - \bar\partial\phi)$ примитивна. Это точная, примитивная форма, причем $\alpha = \partial\beta$, где $\bar\partial\beta = 0$. Выведите из этого, что $\alpha = 0$.

Задача 4.21. Пусть (M, ω) - компактное, комплексное 3-многообразие с КТ-метрикой. Докажите, что

$$\dim H^1(\mathcal{O}_M)/H^1_a(\mathcal{O}_M) \leqslant 1.$$

Докажите, что $H^1(M)$ четно, если $\dim H^1(\mathcal{O}_M)/H^1_a(\mathcal{O}_M) = 0$, и нечетно, если $\dim H^1(\mathcal{O}_M)/H^1_a(\mathcal{O}_M) \neq 0$.

Задача 4.22. Пусть (M, ω) - компактное, комплексное 3-многообразие с КТ-метрикой, причем $b_1(M)$ четно. Докажите, что на M выполнена $\partial\bar\partial$-лемма: любая точная $(1,1)$-форма лежит в образе $\partial\bar\partial$.

Задача 4.23. Докажите, что многообразие Калаби-Экмана, гомеоморфное $S^3 \times S^3$, не допускает КТ-метрики.

Литература:

[BPV] Barth W., Peters C., Van de Ven A. *Compact complex surfaces*, 1984 (библиотека "Колхоз").

[B] Артур Бессе (ред.), *Четырехмерная риманова геометрия: семинар Артура Бессе (1978-1979),* изд. Мир, 1985, Москва (библиотека "Колхоз").