НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 10.
Геодезические. 17.04.2009.

Задача 1. Фиксируем точку p на римановом многообразии M. Напомним, что экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом достаточно малой окрестности U нулевого вектора из T_pM на свой образ $\exp_p(U)$, и что экспоненциальное отображение вводит в этой окрестности p так называемые геодезические координаты, центрированные в точке p, следующим образом: фиксируем базис в касательном пространстве T_pM, тогда координаты касательного вектора v в этом базисе по определению будут геодезическими координатами точки $\exp_p(v)$.

Докажите, что в геодезических координатах, центрированных в точке p, символы Кристоффеля в точке p обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).

Задача 2. Координаты называются центрированными в точке p, если координаты p равны $(0, \ldots, 0)$. Докажите, что центрированные в точке p координаты $x^1, \ldots, x^n$, определённые в окрестности U, являются геодезическими координатами, центрированными в точке p, тогда и только тогда, когда $\Gamma^i_{jk} x^j x^k \equiv 0$ тождественно по $x^1, \ldots, x^n$ в U. *Указание. Обратите внимание на то, что в геодезических координатах, центрированных в точке p, геодезические, проходящие через точку p, имеют вид $x^i = a^i t$.*

Задача 3. Интегрируя уравнение геодезических, найти все геодезические на плоскости Лобачевского *как непараметризованные кривые.* Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. *Указание. Найдите два интеграла исходной системы из двух дифференциальных уравнений второго порядка и используйте их для понижения порядка. Вы получите два уравнения, дающие $\dfrac{dx}{dt}$ и $\dfrac{dy}{dt}$. Выпишите тогда уравнение для $\dfrac{dy}{dx}$ и решите его.*

Задача 4. Докажите, что в полугеодезических координатах $x^1, \ldots, x^n$, то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} g_{ij} dx^i dx^j + (dx^n)^2,$$

кривые $x^1 = \mathrm{const}, \ldots, x^{n-1} = \mathrm{const}$ являются геодезическими с параметром $t = x^n$.

Задача 5. Докажите, что геодезическая $\exp_p(tv)$ и геодезическая сфера $\exp_p(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_pM \,|\, |v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу. Как при помощи этого наблюдения ввести полугеодезические координаты в окрестности точки p?

Задача 6. Докажите, что северный и южный полюс сферы $\mathbb{S}^n$ являются сопряжёнными точками вдоль дуги большого круга кратности $n-1$.

Задача 7*. Докажите, что на многообразии отрицательной секционной кривизны геодезические не содержат сопряжённых точек.

Задача 8*. Докажите, что для многообразия положительной секционной кривизны $K \geqslant \mathrm{const} > 0$ существует такая постоянная T, что любая геодезическая, длина которой не меньше чем T, содержит пару точек, сопряжённых вдоль этой геодезической.