НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 11.
Характеристические классы I. 1.05.2009.

Задача 1. Пусть η вещественное расслоение, $\mathbb{C}\otimes\eta$ его комплексификация. Докажите, что $c_{2k+1}(\mathbb{C}\otimes\eta)=0$, $c_{2k}(\mathbb{C}\otimes\eta)=(-1)^k p_k(\eta)$.

Указание. Посмотрите на полный класс Чженя и воспользуйтесь образующими У.

Задача 2. Пусть ранг комплексного векторного расслоения ξ равен k. Выразите $c_1(\det\xi)=c_1(\Lambda^k\xi)$ через классы Чженя расслоения ξ.

Задача 3. Пусть ξ комплексное расслоение, $r\xi$ его овеществление.

а) Выразите $p_k(r\xi)$ через классы Чженя расслоения ξ.

б) Докажите, что $\chi(r\xi)=c_n(\xi)$.

Указание. Посмотрите на полный класс Понтрягина и воспользуйтесь образующими У.

Задача 4. Найдите $\mathrm{ch}(\xi_k)$, где ξ_k есть тривиальное расслоение ранга k.

Задача 5. Для ориентированной поверхности в евклидовом пространстве $M^2\hookrightarrow\mathbb{R}^3$ выразить классы Эйлера и Понтрягина через первую и вторую квадратичные формы.

Указание. Не забывайте про формулу Уитни для классов Понтрягина!

Задача 6. Докажите, что если у комплексного расслоения ξ есть k не обращающихся в ноль и независимых в каждой точке сечений, то $c_n(\xi)=0$, $\ldots$, $c_{n-k+1}(\xi)=0$.

Задача 7. Докажите, что если у ориентированного вещественного расслоения η есть не обращающееся в ноль сечение, то $\chi(\eta)=0$.