НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 12. Характеристические классы II. 8.05.2009.

Задача 1. Пусть ξ комплексное расслоение. Как классы Чженя двойственного расслоения $c_i(\xi^*)$ выражаются через классы Чженя $c_i(\xi)$?

Задача 2. Пусть η вещественное расслоение. Как классы Понтрягина двойственного расслоения $p_i(\eta^*)$ выражаются через классы Понтрягина $p_i(\eta)$?

Задача 3. Пусть ξ комплексное расслоение, $\operatorname{rk}\xi = k$, а $S^2\xi \subset \xi \otimes \xi$ его симметрический квадрат. Найдите $c_1(S^2\xi)$.

Задача 4. Найдите класс Чженя касательного расслоения $T\mathbb{C}P^1$ и число Чженя $\langle c_1(T\mathbb{C}P^1), [\mathbb{C}P^1]\rangle$.

Указание. Класс Чженя касательного расслоения $T\mathbb{C}P^1$ можно легко найти с помощью формулы, связывающей расслоение $(\gamma^1)^*$, двойственное к тавтологическому, и $T\mathbb{C}P^1$.

Задача 5. Докажите, что если многообразие M является границей некоторого многообразия W, то все числа Понтрягина M равны нулю.

Указание. Вспомните о функториальности классов Понтрягина и используйте теорему Стокса.

Задача 6*. Докажите, что $\mathbb{CP}^2$ не может быть краем какого-либо многообразия.