НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 3. Поверхности в n-мерном евклидовом пространстве. 27.02.2009.

Задача 1. Рассмотрим 2-поверхность M в $\mathbb{E}^3$ и точку $A \in M$. Выберем нормаль $\mathbf{m}$ в точке A. Запишем $B(X,Y)$ в виде $B(X,Y) = \hat{B}(X,Y)\mathbf{m}$, где $\hat{B}$ некоторая обычная (вещественнозначная) квадратичная форма на касательной плоскости. Доказать, что $\hat{B}(X,Y) = \mathbf{II}(X,Y)$, то есть это вторая квадратичная форма поверхности.

Задача 2. Рассмотрим гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$. Найти связность в нормальном расслоении.

Задача 3. a) Вывести соотношение между db, b, Γ и K (уравнение Петерсона-Кодацци) по аналогии с уравнением Гаусса $d\,\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = b_\mu \wedge b^\mu$, связывающим $d\,\Gamma$, Γ и b.

b) Доказать, что в случае гиперповерхности если взять единичное поле нормалей в качестве базиса в нормальных векторных полях, то уравнение Петерсона-Кодацци не содержит K.

c) Написать уравнение Петерсона-Кодацци в терминах Γ^l_{ij}, b^μ_{ij}, $K_{i,\nu}^{\ \mu}$. Написать его в частном случае двумерной поверхности в $\mathbb{E}^3$.

Задача 4. Написать уравнение Гаусса $d\,\Gamma^i_j + \Gamma^i_l \wedge \Gamma^l_j = b^\nu_m g_{\mu\nu} g^{mi} \wedge b^\mu_j$ в терминах Γ^l_{ij} и b^μ_{ij}. Написать его в частном случае двумерной поверхности в $\mathbb{E}^3$.

Задача 5. Докажите формулу

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(\partial_X\langle Y,Z\rangle + \partial_Y\langle Z,X\rangle - \partial_Z\langle X,Y\rangle +$$
$$+\langle Z,[X,Y]\rangle + \langle Y,[Z,X]\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle),$$

не используя координат векторных полей и символов Кристоффеля.

Задача 6. Перепишите формулу преобразования символов Кристоффеля $\tilde{\Gamma} = T^{-1}\cdot\Gamma\cdot T + T^{-1}\cdot dT$ в терминах Γ^l_{ij} и $\tilde{\Gamma}^l_{ij}$.

Задача 7. Вывести формулу преобразования величин $K_{i,\nu}^{\ \mu}$, задающих связность в нормальном расслоении, при замене базиса в нормальных векторных полях. Записать её как в матричном виде, так и в терминах $K_{i,\nu}^{\ \mu}$ и $\tilde{K}_{i,\nu}^{\ \mu}$.

Задача 8. Рассмотрим случай двумерной поверхности в $\mathbb{E}^3$. Пусть $\eta_1 = \mathbf{m}$. Доказать, что $W_{\eta_1} = \mathbf{I}^{-1}\cdot\mathbf{II}$. Вывести отсюда, что определения главных кривизн для поверхностей в трёхмерном (через первую и вторую квадратичную форму) и n-мерном пространстве (через оператор Вейнгартена) совпадают.

Задача 9. Придумать аналог нормали средней кривизны для k-поверхности в $\mathbb{E}^n$. Естественно, при $k=2$, $n=3$ результат должен совпадать с уже данным определением. *Указание: используйте линейный функционал* $\xi \mapsto \dfrac{1}{k}\operatorname{tr} W_\xi$ *на пространстве* $N_A M$.

Задача 10. Рассмотрим кривую в $\mathbb{E}^n$. Легко видеть, что любое базисное касательное векторное поле e_1 можно рассматривать как вектор скорости для некоторой параметризации. Пусть t такой параметр.

а) Доказать, что кривизна кривой может быть найдена по формуле

$$k = \sqrt{\left(\frac{b^1_{11}}{g_{11}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{b^{n-1}_{11}}{g_{11}}\right)^2}.$$

б) Доказать, что $\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln g_{11}$.

Задача 11. Найти в частном случае $k=2$, $n=3$ деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена, если выбрать базис в касательных векторных полях $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ и базис $\mathbf{m}$ в нормальных векторных полях.