НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 5.
Группы и алгебры Ли. 12.03.2009.

Задача 1. Доказать, что группы $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ и $\mathrm{SU}(n)$ являются группами Ли. *Указание: можно рассмотреть стабилизаторы подходящего действия.*

Задача 2. Доказать, что коммутатор двух левоинвариантных (правоинвариантных) векторных полей тоже является левоинвариантным (правоинвариантным).

Задача 3. Доказать, что оба определения коммутатора в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ эквивалентны. Доказать, что если в определении использовать правоинвариантные векторные поля, то мы получим коммутатор, умноженный на -1.

Задача 4. Доказать, что

a) алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ является пространством всех вещественных $n\times n$-матриц с нулевым следом со стандартным матричным коммутатором;

b) алгебра Ли $\mathfrak{so}(n)$ является пространством всех вещественных кососимметрических $n\times n$-матриц со стандартным матричным коммутатором, причём $\mathfrak{o}(n)=\mathfrak{so}(n)$;

c) алгебра Ли $\mathfrak{u}(n)$ является пространством всех комплексных косоэрмитовых $n\times n$-матриц со стандартным матричным коммутатором;

d) алгебра Ли $\mathfrak{su}(n)$ является пространством всех комплексных косоэрмитовых $n\times n$-матриц с нулевым следом со стандартным матричным коммутатором;

Задача 5. Доказать, что $\operatorname{ad}\xi(\eta)=[\xi,\eta]$.

Задача 6. Доказать, что прямое произведение групп Ли является группой Ли. Как найти соответствующую алгебру Ли?

Задача 7. Доказать, что группа Ли всегда ориентируема.

Задача 8. Доказать, что если O — некая окрестность единицы в связной группе Ли G, то $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} O^n=G$, где O^n означает множество всех произведений из n элементов O.

Задача 9. Пусть G — связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — её алгебра Ли. Доказать, что если коммутатор любых элементов $\mathfrak{g}$ равен нулю, то G абелева (поэтому алгебры Ли с нулевым коммутатором называются абелевыми).

Задача 10. Построить естественные гомоморфизмы групп Ли
a) $\mathrm{SU}(2)\longrightarrow\mathrm{SO}(3)$, b) $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)\longrightarrow\mathrm{SO}(4)$.

Задача 11. Доказать, что

a) компонента связности единицы G^0 группы Ли G является нормальной подгруппой Ли группы G,

b) компоненты связности группы Ли G являются смежными классами по G^0, c) факторгруппа G/G^0 дискретна.

Задача 12. Пусть группа Ли G *транзитивно* действует на *связном* многообразии M. Доказать, что

a) компонента связности единицы G^0 тоже транзитивно действует на M,

b) $G/G^0\cong G_x/(G_x\cap G^0)$ для любой точки $x\in X$,

c) если существует такая точка $x\in X$, что стабилизатор G_x связен, то группа Ли G тоже связна.

Задача 13. Найти число компонент связности для a) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, b) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, c) $\mathrm{O}(n)$, d) $\mathrm{SO}(n)$, e) $\mathrm{U}(n)$, f) $\mathrm{SU}(n)$.