НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 6.
Векторные расслоения. 20.03.2009.

Задача 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ состоит из таких пар (l, v), что если рассмотреть $l \in \mathbb{R}P^n$ как прямую в $\mathbb{R}^{n+1}$, то $v \in l$. Пусть $p : E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ естественная проекция, индуцированная проекцией из прямого произведения $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ на первый сомножитель. Доказать, что $E \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n$ — гладкое векторное локально тривиальное расслоение ранга 1 и найти его склеивающие коциклы при выборе стандартных аффинных подмножеств $\mathbb{R}P^n$ в качестве тривиализирующего покрытия. Это расслоение называется универсальным или тавтологическим расслоением над $\mathbb{R}P^n$.

Задача 2. Построить аналогично универсальное (или тавтологическое) расслоение над многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$ и найти его склеивающие коциклы.

Задача 3. Пусть $\xi = (E, p, B)$ локально тривиальное расслоение, U_α тривиализующие окрестности, а $g_{\alpha\beta}$ соответствующие склеивающие коциклы. Рассмотрим расслоение $f^*\xi$, где $f : M \longrightarrow B$. Докажите, что $f^*g_{\alpha\beta}$, определённые формулой

$$f^*g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(f(x)),$$

задают склеивающие коциклы для $f^*\xi$ для тривиализующего покрытия множествами $f^{-1}(U_\alpha)$.

Задача 4. Пусть ξ векторное расслоение.

а) Объясните, как строить склеивающие коциклы для расслоений ξ^*, $\xi \wedge \xi$.

б) Для комплексного векторного расслоения ξ объясните, как строить коциклы для овеществления ξ.

в) Для вещественного векторного расслоения ξ объясните, как строить коциклы для комплексификации ξ.

Задача 5. Являются ли тривиальными касательные расслоения

а) TS^1,

б) TS^2,

в) TS^3?

Задача 6. Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их прямая сумма — тривиальное расслоение.

Задача 7. Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их произведение — тривиальное расслоение.

Задача 8*. Пусть $f : M \longrightarrow N$ — гладкое сюръективное отображение компактного многообразия M в связное многообразие N, такое что дифференциал этого отображения $df : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ является эпиморфизмом в любой точке x. Доказать, что тогда $M \xrightarrow{f} N$ является локально тривиальным расслоением.

Задача 9*. Доказать, что если база расслоения стягиваема, то расслоение тривиально.