НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 9. Римановы многообразия. 10.04.2009.

Задача 1. Доказать, что любая цилиндрическая поверхность локально изометрична плоскости. Доказать аналогичный факт для конических поверхностей.

Задача 2. Доказать, что геликоид

$$\mathbf{r}(u,v) = (u \sin v, u \cos v, av)$$

и катеноид

$$\mathbf{R}(u,v) = \left(\sqrt{a^2+u^2}\cos v, \sqrt{a^2+u^2}\sin v, a \ln \frac{u+\sqrt{a^2+u^2}}{a}\right)$$

локально изометричны.

Задача 3. Пусть e_i базис в векторных полях, e^i дуальный к нему базис. Рассмотрим сечение s расслоения $\xi = (E \longrightarrow M)$. Формулу $\nabla s = e^i \otimes \nabla_{e_i} s$, где $s \in \Gamma(M, E)$, для связности в расслоении ξ по ошибке иногда пишут как $\nabla s = e^i \wedge \nabla_{e_i} s$, но последняя формула неверна и *для произвольного расслоения ξ не имеет смысла!*

Но есть случай, когда операция $\nabla \wedge s := e^i \wedge \nabla_{e_i} s$ имеет смысл и тоже интересна. Пусть у нас есть симметричная связность ∇ в TM. Распространим эту связность в расслоение внешних форм. Пусть $s \in \Omega(M)$ дифференциальная форма на M. Рассмотрим операцию $\nabla \wedge s := e^i \wedge \nabla_{e_i} s$, где мы смотрим на s как на сечение расслоения ΛT^*M, а не как на форму со значениями в сечениях.

Доказать, что тогда $\nabla \wedge s = ds$, то есть это обычный внешний дифференциал формы s. Чему равно выражение $\nabla \wedge s$ для несимметричной связности ∇ в касательном расслоении TM?

Задача 4. Если ∇ связность в касательном расслоении TM, то она продолжается до связностей во всех тензорных расслоениях $T^p_q M$. Для простоты будем обозначать эти продолжения связности ∇ тем же символом ∇. Доказать, что связность ∇ согласована с метрикой $\langle\, , \rangle$ тогда и только тогда, когда $\nabla g = 0$, где g метрический тензор.

Задача 5. Найти явные формулы, выражающие компоненты тензора Римана $R^l_{ij,k}$ через символы Кристоффеля Γ^k_{ij}.

Задача 6. Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой $R^1_{12,2}$.

Задача 7. Доказать, что для симметричной связности ∇ имеет место тождество Бианки

$$(\nabla_X R)(Y,Z,V) + (\nabla_Y R)(Z,X,V) + (\nabla_Z R)(X,Y,V) = 0,$$

где X, Y, Z и V векторные поля. В компонентах это тождество имеет вид

$$\nabla_m R^l_{ij,k} + \nabla_i R^l_{jm,k} + \nabla_j R^l_{mi,k} = 0.$$

Задача 8. Для связности в касательном расслоении доказать следующие тождества:

a) первое структурное уравнение Картана $de^i = e^j \wedge \Gamma^i_j + T^i$,

b) второе структурное уравнение Картана

$$d\Gamma^j_i = \Gamma^k_i \wedge \Gamma^j_k + F^j_i,$$

c) первое тождество Бианки

$$dT^i = -T^j \wedge \Gamma^i_j + e^j \wedge F^i_j,$$

d) второе тождество Бианки

$$dF^j_i = \Gamma^k_i \wedge F^j_k - F^k_i \wedge \Gamma^j_k,$$

где e^i дуальный базис к выбранному базису e_i в векторных полях, Γ^i_j локальная 1-форма связности,

$$F^j_i = R^j_{kl,i} e^k \otimes e^l = \sum_{k<l} R^j_{kl,i} e^k \wedge e^l$$

локальная 2-форма кривизны, а T^i локальные 2-формы кручения,

$$T^k = T^k_{ij} e^i \otimes e^j = \sum_{i<j} T^k_{ij} e^i \wedge e^j$$

.

Задача 9. Доказать, что тензор Риччи связности Леви-Чивита ∇ является симметрическим, $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$.

Задача 10. Рассмотрим двумерную поверхность M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой и связностью Леви-Чивита. Пусть K гауссова кривизна M. Доказать, что в данном случае

a) $\mathrm{Ric}(X,Y) = K\langle X,Y\rangle$, или, в тензорной записи, $R_{ij} = Kg_{ij}$,

b) скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой, $R = 2K$.

Задача 11. Рассмотрим плоскость Лобачевского L, например как верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$ с метрикой $ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$. Доказать, что секционная кривизна K_{T_pL} в любой точке $p \in L$ равна -1.

Задача 12. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество

$$R = \frac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Задача 13. Доказать, что для n-мерной сферы $\mathbb{S}^n_r \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса r тензор Римана можно найти по формуле

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}(<Y,Z>X - <X,Z>Y).$$

Задача 14. Доказать, что в предыдущей задаче секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \dfrac{1}{r^2}$.

Задача 15. Найти скалярную кривизну прямого произведения сфер $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1} \times \mathbb{S}^{n_2}_{r_1}$ с естественной структурой риманова многообразия.