НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Экзамен. 15.05.2009.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо не позднее, чем через 2 недели, положить в учебной части в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) или оставить на вахте внизу в конверте с моим именем.

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день.

Для того, чтобы экзамен был засчитан, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее половины задач (в задачах из нескольких пунктов каждый пункт решено считать отдельной задачей). Прием задач из листков не заканчивается на семинаре 15 мая, но после 15 мая надо договариваться с лектором или семинаристом о встрече для сдачи задач.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно».

Задача 1. Пусть K и H являются гауссовой и средней кривизной поверхности соответственно (напомним, что мы придерживаемся определения, при котором H есть *сумма* главных кривизн, а не *полусумма*). Докажите, что $H^2 \geqslant 4K$. *(5 баллов)*

Задача 2. Поверхность называется *линейчатой*, если она параметрически задается в виде

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u).$$

Докажите, что на линейчатой поверхности гауссова кривизна всюду неположительна. *(5 баллов)*

Задача 3. Из аналитической геометрии вы знаете примеры поверхностей, на которых есть два различных семейства прямолинейных образующих. Докажите, что если на гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является куском плоскости. *(10 баллов).*

Задача 4. Рассмотрим плоскость Лобачевского, например как верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$ с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Докажите, что секционная кривизна всюду равна -1. *(5 баллов).*

Задача 5. Пусть M_1 и M_2 римановы многообразия. На прямом произведении $M = M_1 \times M_2$ естественным образом вводится структура риманова многообразия, так как на касательном расслоении $TM = TM_1 \oplus TM_2$ естественно вводится евклидова метрика.

Пусть $p_i : M = M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$, $i = 1, 2$, естественные проекции. Чтобы упростить дальнейшие формулы, введём обозначение $X_i = dp_i(X) \in \Gamma(TM_i)$, где $X \in \Gamma(TM)$ векторное поле на M. Пусть R тензор Римана риманова многообразия M, а R^i тензор Римана римановых многообразий M_i, $i = 1, 2$.

a) Доказать, что

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle R^1(X_1, Y_1)Z_1, W_1\rangle + \langle R^2(X_2, Y_2)Z_2, W_2\rangle.$$

(5 баллов).

b) Пусть $\sigma \subset T_pM$, $p \in M$, такая 2-плоскость, что $\dim dp_i(\sigma) = 1$, $i = 1, 2$, то есть плоскость σ «натянута на вектор, касательный к M_1, и на вектор, касательный к M_2». Доказать, что тогда секционная кривизна в точке p в направлении σ равна нулю, $K_\sigma = 0$. *(5 баллов).*

Задача 6. Пусть $[z_0 : \cdots : z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{R}P^n$. Напомним, что *отображение Веронезе* степени d — это отображение $\nu_d : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0 : \ldots : z_n]) = [\ldots : z^I : \ldots], \tag{1}$$

где z^I это некоторый моном степени d от $z_0, \ldots, z_n$, а в правой части (1) стоят все мономы степени d. Например, при $n = 2$ и $d = 2$ получаем отображение $\mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^5$, заданное формулой

$$\nu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0 z_1 : z_0 z_2 : z_1 z_2].$$

Найдите обратный образ $\nu_d^* \gamma^1$ универсального расслоения при этом отображении. *(10 баллов).*

Задача 7. Для ориентированной поверхности в евклидовом пространстве $M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ выразить классы Эйлера и Понтрягина через первую и вторую квадратичные формы. *(10 баллов).*

Задача 8*. Найти число Понтрягина

$$\langle p_1(r\gamma_{\mathbb{H}}^1), [\mathbb{S}^4] \rangle = \oint_{\mathbb{S}^4} p_1(r\gamma_{\mathbb{H}}^1),$$

где $\gamma_{\mathbb{H}}^1 = (E \longrightarrow \mathbb{H}P^1 \simeq S^4)$ — универсальное расслоение над кватернионной проективной прямой, а r операция овеществления (не забывайте о некоммутативности кватернионов!) *(25 баллов).*