Задачи по алгебрам Ли – 2

1. а) Покажите, что все неприводимые представления абелевой алгебры Ли одномерны. **б)** Покажите, что в любом неприводимом представлении алгебры Ли $\mathfrak{a}$ все элементы центра универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{a})$ действуют скалярными операторами. (*Указание:* вспомните лемму Шура).

2. а) Покажите, что для любого $x \in \mathfrak{a}$ оператор $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ является дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{a}$ (такие дифференцирования алгебры Ли называются *внутренними*). **б)** Докажите, что внутренние дифференцирования образуют идеал в алгебре Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ всех дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{a}$.

3. Покажите, что любое дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{a}$ (в частности, любое внутреннее дифференцирование) единственным образом продолжается до дифференцирования **а)** симметрической алгебры $S(\mathfrak{a})$; **б)** тензорной алгебры $T(\mathfrak{a})$; **в)** универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{a})$. Таким образом, эти алгебры являются представлениями алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{a})$.

4. а) Докажите, что отображение симметризации $\sigma : S(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a})$ является изоморфизмом представлений алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ (и, в частности, изоморфизмом представлений алгебры Ли $\mathfrak{a}$). **б)** Пусть $S(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}} = \{F \in S(\mathfrak{a}) \mid \mathrm{ad}(x)F = 0\ \forall x \in \mathfrak{a}\}$ – алгебра $\mathfrak{a}$-инвариантов в $S(\mathfrak{a})$. Покажите, что $\mathrm{gr}\, ZU(\mathfrak{a}) = S(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}}$ и $ZU(\mathfrak{a}) = \sigma(S(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}})$.

5. Пусть e, f, h – стандартные образующие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, такие, что

$$[e, f] = h,\ [h, e] = 2e,\ [h, f] = -2f.$$

а) Покажите, что элемент $C = ef + fe + \frac{1}{2}h^2$ (называемый *элементом Казимира*) лежит в центре универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$; **б)** покажите, что любой элемент алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ может быть представлен в виде линейной комбинации элементов

$$e^i h^j C^k \text{ или } f^i h^j C^k, \text{где } i, j, k \text{ – целые неотрицательные числа;}$$

в) докажите, что такое представление единственно; **г)** докажите, что центр алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ порожден элементом C.

6. Найдите центры универсальных обертывающих алгебр для всех алгебр Ли размерности ≤ 3.

7. а) Пусть W_1 – алгебра Ли полиномиальных векторных полей на комплексной прямой (элементы этой алгебры имеют вид $f(x)\partial_x$, где $f(x)$ – многочлен). Докажите, что элементы вида $f(x)\partial_x$, где $\deg f(x) \leq 2$, образуют подалгебру Ли в W_1, изоморфную $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. **б)** Пусть W_2 – алгебра Ли полиномиальных векторных полей на комплексной плоскости (элементы этой алгебры имеют вид $f(x,y)\partial_x + g(x,y)\partial_y$, где $f(x,y),\ g(x,y)$ – многочлены). Докажите, что элементы вида $f(x,y)\partial_x + g(x,y)\partial_y$, где $f(x,y),\ g(x,y)$ – однородные линейные многочлены, образуют подалгебру Ли в W_2, изоморфную $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$. **в*)** Найдите в W_2 подалгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

8. Представление T_λ алгебры Ли W_1 в пространстве тензорных полей веса λ, состоящем из выражений вида $g(x)(dx)^\lambda$ задается формулой

$$\rho(f(x)\partial_x)g(x)(dx)^\lambda = (f(x)g'(x) - \lambda f'(x)g(x))(dx)^\lambda.$$

а) При каких значениях $\lambda \in \mathbb{C}$ это представление приводимо? **б)** При каких значениях $\lambda \in \mathbb{C}$ ограничение этого представления на $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ приводимо? **в)** Вычислите действие элемента Казимира на этих представлениях.

9*. Рассмотрим представление алгебры Ли W_2 в пространстве $\mathbb{C}[x, y]$ полиномиальных функций на комплексной плоскости. **а)** Покажите, что ограничение этого представления на $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ вполне приводимо, и найдите все неприводимые факторы. (*Указание:* вычислите действие элемента Казимира и центрального элемента алгебры Ли $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ на этом представлении). **б)** Верно ли, что ограничение этого представления на $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \subset W_2$ вполне приводимо?