Задачи по алгебрам Ли – 3

1. Докажите, что что любая подалгебра и любая факторалгебра нильпотентной алгебры Ли нильпотентна.

2. а) Пусть $I \subset \mathfrak{a}$ – разрешимый идеал, такой, что факторалгебра Ли $\mathfrak{a}/I$ разрешима. Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{a}$ разрешима. **б)** Верно ли аналогичное утверждение для нильпотентных алгебр Ли?

3. Опишите с точностью до изоморфизма все нильпотентные комплексные алгебры Ли размерности ≤ 4.

4. а) Докажите, что сумма двух нильпотентных идеалов в алгебре Ли есть снова нильпотентный идеал. **б)** Докажите, что в любой конечномерной алгебре Ли есть наибольший нильпотентный идеал.

5. Комплексная алгебра Ли $\mathfrak{a}$ допускает невырожденное (как линейный оператор) дифференцирование. Докажите, что эта алгебра Ли нильпотентна.

6. Докажите, что любая ненильпотентная комплексная алгебра Ли имеет двумерную неабелеву подалгебру.

7. а) Пусть V_1 и V_2 – неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и V – такое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, что $V_1 \subset V$ и $V/V_1 \simeq V_2$. Докажите, что $V \simeq V_1 \oplus V_2$. **б)** Докажите, что конечномерные представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ вполне приводимы.

8. а) Пусть $L(n)$ и $L(m)$ – неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ размерностей $n+1$ и $m+1$ соответственно. Разложите представление $L(n) \otimes L(m)$ в прямую сумму неприводимых. **б)** Разложите представления $S^k(L(n))$ и $\Lambda^k(L(n))$ в прямую сумму неприводимых для $n = 1, 2, 3$.