Задачи по алгебрам Ли – 4

1. а) Докажите, что форма Киллинга нильпотентной алгебры Ли тождественно равна 0. **б)** Верно ли обратное?

2. Найдите форму Киллинга **а)** двумерной неабелевой алгебры Ли; **б)** $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$; **в)** $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

3. Пусть $\mathfrak{a}$ – простая алгебра Ли. Докажите, что любая инвариантная форма на $\mathfrak{a}$ пропорциональна форме Киллинга.

4. Пусть $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$ – полупростая алгебра Ли, разложенная в прямую сумму простых. **а)** Докажите, что любой идеал в $\mathfrak{a}$ есть сумма некоторых из $\mathfrak{a}_i$. **б)** Докажите, что все дифференцирования алгебры Ли $\mathfrak{a}$ внутренние. (*Указание:* Пусть D – дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Рассмотрите подалгебру Ли в алгебре Ли $Der(\mathfrak{a})$, порожденную внутренними дифференцированиями и D, и найдите все ее идеалы.)

5. Пусть $V = \mathbb{C}^n$ – тавтологическое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$. Покажите, что **а)** V неприводимо, **б)** $\Lambda^k V$ неприводимо при $k = 1, \ldots, n$, **в)** $\Lambda^k V$ неприводимо при $k = 1, 2, \ldots$. (*Указание:* все весовые пространства в этих представлениях одномерны.) **г)** Найдите старшие веса этих представлений.

6. $V = \mathbb{C}^n$ – представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$ из задачи 5. Разложите в прямую сумму неприводимых представление **а)** $V \otimes V$, **б)** $V \otimes V^*$. **в)** Покажите, что всякое неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$ встречается в разложении тензорных произведений нескольких $\Lambda^k V$ для некоторых k, **г)** в разложении тензорных степеней представления V.