Задачи по алгебрам Ли – 5

1. Выпишите матрицу Грама формы Φ_V для алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в базисе e, f, h для неприводимого представления V размерности $n+1$.

2. Пусть $x \in \mathfrak{gl}(V)$. Найдите жорданову нормальную форму оператора $\operatorname{ad} x$, если **а)** x – жорданова клетка с собственным значением 0; **б)** x – диагональная матрица; **в*****)** x – произвольная матрица.

3. Пусть $x = x_s + x_n$ – разложение Жордана элемента x в полупростой алгебре Ли $\mathfrak{a}$. Докажите, что для любого представления (ρ, V) алгебры $\mathfrak{a}$ оператор $\rho(x_s)$ полупрост, а $\rho(x_n)$ нильпотентен.

4. Пусть $\mathfrak{a}'$ – подалгебра Ли в алгебре Ли $\mathfrak{a}$. Покажите, что разложение Жордана элемента $x \in \mathfrak{a}'$ является разложением Жордана x в $\mathfrak{a}$.

5. Алгебра Ли называется редуктивной, если ее радикал совпадает с ее центром. Покажите, что **а)** Редуктивная алгебра Ли является прямой суммой простых; **б)** алгебра Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ редуктивна, но не полупроста; **в)** алгебра Ли редуктивна тогда и только тогда, когда допускает невырожденную инвариантную форму.

6. **а)** Докажите, что образ конечномерной алгебры Ли в конечномерном неприводимом представлении редуктивен. **б)** Пусть $\mathfrak{a}$ – произвольная конечномерная алгебра Ли. Покажите, что тензорное произведение конечномерных вполне приводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{a}$ вполне приводимо.

7. **а)** Докажите, что алгебры Ли $so_n(\mathbb{C})$ и $sp_{2n}(\mathbb{C})$ при $n \geq 1$ редуктивны. **б)** Какие из этих алгебр Ли полупросты? просты?