Домашний экзамен по алгебрам Ли

Решения задач в письменном виде можно оставить в учебной части или прислать мне на leo.rybnikov@gmail.com **до вечера вторника 12 мая**. На пятерку требуется полностью (со всеми пунктами) решить любые 3 задачи из приведенных ниже или значительно продвинуться в каждой из задач. Результаты будут вывешены в пятницу 15 мая. Удачи!

1. а) Докажите, что для любой нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{a}$ выполнено одно из следующих условий:

(1) $\dim \mathfrak{a} = 1$;
(2) размерность центра $\dim Z\mathfrak{a} \geq 2$;
(3) в алгебре Ли $\mathfrak{a}$ имеется подалгебра Гейзенберга $\mathbb{C}\{x, y, z\}$ ($[x, y] = z$) такая, что $x \notin [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$, $[y, \mathfrak{a}] = \mathbb{C}z$, $z \in Z\mathfrak{a}$.

б) Докажите, что в случае (3) существует такой идеал $I \subset \mathfrak{a}$, что подалгебра инвариантов в симметрической алгебре $S(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}} \subset S(\mathfrak{a})$ лежит в $S(I)$. **в)** Покажите, что для любого $t \in Z\mathfrak{a}$ отображение симметризации $\sigma : S(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a})$ преводит идеал $S(\mathfrak{a})t$ в идеал $U(\mathfrak{a})t$. **г)** Докажите, что отображение симметризации $\sigma : S(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a})$ при ограничении на подалгебру инвариантов дает изоморфизм алгебр $S(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}} \tilde{\to} ZU(\mathfrak{a})$, где $ZU(\mathfrak{a})$ – центр универсальной обертывающей алгебры. (*Указание:* воспользуйтесь индукцией по размерности алгебры Ли). **д)** Покажите, что для ненильпотентных алгебр Ли последнее, вообще говоря, неверно.

2. а) Пусть $V = \mathbb{C}^2$ – тавтологическое представление алгебры Ли $sl_2(\mathbb{C})$. Найдите характер представления $V^{\otimes k}$ – k-й тензорной степени представления V. **б)** Найдите кратность тривиального представления в $V^{\otimes k}$.

3. а) Найдите размерность и характер неприводимого представления $L(\rho)$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со старшим весом $\rho = \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$. **б)** Покажите, что присоединенное действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ однозначно продолжается до действия дифференцированиями на *алгебре Грассмана* $\Lambda^* \mathfrak{g}$ с пространством образующих $\mathfrak{g}$ и определяющими соотношениями $xy + yx = 0\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$. **в)** Докажите, что представление полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ дифференцированиями алгебры Грассмана $\Lambda^* \mathfrak{g}$ изоморфно $L(\rho) \otimes L(\rho)$ с кратностью 2^l, где l – размерность подалгебры Картана.

4. а) Пусть $V = \mathbb{C}^n$ – тавтологическое представление алгебры Ли $sl_n(\mathbb{C})$. Докажите, что фундаментальные представления sl_n – это внешние степени представления V. **б)** Докажите, что любое неприводимое конечномерное представление алгебры Ли $sl_n(\mathbb{C})$ является подпредставлением в какой-нибудь тензорной степени представления V. **в)** Разложите в прямую сумму неприводимых представления $V \otimes V$ и $V \otimes V \otimes V$.

5.(Спинорное представление) **а)** Пусть $V = \mathbb{C}^n$. Рассмотрим алгебру Грассмана $\Lambda^* V$, порожденную пространством V с определяющими соотношениями $xy + yx = 0\ \forall x, y \in V$. Рассмотрим алгебру Клиффорда $Cl(V \oplus V^*)$, порожденную пространством $V \oplus V^*$ с определяющими соотношениями $xy + yx = 0,\ \xi\eta + \eta\xi = 0,\ \xi y + y\xi = \langle \xi, y \rangle,\ \forall x, y \in V,\ \xi, \eta \in V^*$. Постройте представление алгебры $Cl(V \oplus V^*)$ в пространстве $\Lambda^* V$ и покажите, что $\dim \Lambda^* V = 2^n$, $\dim Cl(V \oplus V^*) = 2^{2n}$ и алгебра $Cl(V \oplus V^*)$ изоморфна $\mathrm{End}(\Lambda^* V) = Mat_{2^n}(\mathbb{C})$. **б)** Покажите, что пространство квадратичных выражений от образующих в $Cl(V \oplus V^*)$ замкнуто относительно операции коммутатора. **в)** Покажите, что пространство квадратичных выражений образует алгебру Ли, изоморфную $so_{2n}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$, т.е. получается представление алгебры Ли $so_{2n}(\mathbb{C})$ в пространстве $\Lambda^* V$. **г)** Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – базис в V, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – двойственный базис в V^*. Покажите, что выражения $x_i\xi_i - \xi_i x_i$ порождают подалгебру Картана в $so_{2n}(\mathbb{C})$. **д)** Разложите полученное представление алгебры Ли $so_{2n}(\mathbb{C})$ в пространстве $\Lambda^* V$ в прямую сумму неприводимых и найдите их старшие веса.