Топология, 4 семестр, 2008/09 уч.г.

Листок N 1, 10 февраля 2009 года.

1. Найдите гомологии и когомологии а) $M_g = \sharp^g \mathbb{T}^2$; б) $N_k = \sharp^k \mathbb{RP}^2$.

2. Пусть задано некоторое вложение $L = \underbrace{S^1 \cup \ldots \cup S^1}_{n \text{ штук}} \subset S^3$.

а) Найдите гомологии и когомологии дополнения $S^3 \backslash L$;

б) Явно постройте образующие групп $H_*(S^3 \backslash L)$.

3. Для конечного клеточного пространства X и некоторого поля $\mathbb{K}$ определим многочлен Пуанкаре

$$P_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i dim_{\mathbb{K}} H_i(X, \mathbb{K}) \in \mathbb{Z}[t]$$

Докажите, что $P_{X \times Y}(t) = P_X(t) P_Y(t)$.

4. Докажите, что многообразия а) S^n, б) $\mathbb{RP}^n$, в) $\mathbb{CP}^n$ нельзя представить в виде произведения многообразий положительной размерности.

5. Пусть топологичекое пространство X представлено в виде объединения $X = A \cup B$, для которого выполняется точная последовательность Майера-Виеториса, причём гомологии всех участвующих в ней пространств конечномерны и присутствуют только до конечной размерности. Докажите, что $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

6. Докажите, что эйлерова характеристика края компактного многообразия чётна.

7. а) Является ли $\mathbb{RP}^2$ краем компактного многообразия?

б) Является ли бутылка Клейна краем компактного многообразия?

в) Выясните какие из поверхностей M_g и N_k являются краями компактных трёхмерных многообразий.

8. Пусть M^n – замкнутое ориентируемое многообразие. Определим его сигнатуру $\sigma(M^n)$ следующим образом. Если $4 \nmid n$, то $\sigma(M^n) = 0$, если $4 \mid n$, то пусть $\sigma(M^n)$ равно сигнатуре формы пересечения в $H_{\frac{n}{2}}(M^n, \mathbb{R})$.

а) Докажите, что $\sigma(M_1 \sqcup M_2) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2)$, где $dim(M_1) = dim(M_2)$;

б) Докажите, что $\sigma(-M) = -\sigma(M)$, где через $-M$ мы обозначаем многообразие M с противоположной ориентацией.

в) Докажите, что $\sigma(M_1 \times M_2) = \sigma(M_1)\sigma(M_2)$.

г) Докажите, что для связных M_1 и M_2 одинаковой размерности выполнено $\sigma(M_1 \sharp M_2) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2)$.

д)*Докажите, что если M^n является краем компактного ориентируемого многообразия, то $\sigma(M^n) = 0$.

9. Положим $L^n_m = S^{2n-1}/\mathbb{Z}_m$, где образующая T группы $\mathbb{Z}_m$ действует в $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ по формуле $T(z_1, \ldots, z_n) = (e^{\frac{2\pi i}{m}} z_1, \ldots, e^{\frac{2\pi i}{m}} z_n)$. Найдите гомологии и когомологии L^n_m.

10. Расмотрим следующее действие группы $\mathbb{Z}_2$ на $S^n \times S^n$: нетривиальный элемент действует центральным отражением в обоих сферах. Положим $X_n = S^n \times S^n / \mathbb{Z}_2$. Найдите гомологии и когомологии X_n при а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 3$; г) $n \geq 4$. (Любопытно, что $X_2 \cong G_{2,4}$, $X_3 \cong SO(4)$)