Топология, 4 семестр, 2008/09 уч.г.

Листок № 10, 21 апреля 2009 года.

1. Докажите, что компактное подмножество клеточного пространство пересекается лишь с конечным числом клеток. Останется ли это верным, если отказаться от хаусдорфовости в стандартном определении клеточного пространства?

2. Докажите, что отображение клеточного пространства в топологическое непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны его композиции со всеми характеристическими отображениями клеток.

3. Докажите, что пространства S^2 и $\mathbb{CP}^\infty \times S^3$ имеют одинаковые гомотопические группы, но разные гомологические группы.

4. Докажите, что пространства $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ и $S^1 \times S^1$ имеют одинаковые гомологические группы, но разные гомотопические группы.

5. Докажите, что хопфовское отображение $S^3 \to S^2$ индуцирует тривиальный гомоморфизм в приведённых гомологиях, но индуцирует нетривиальный гомоморфизм в гомотопических группах.

6. Докажите, что проекция $S^1 \times S^1 \to (S^1 \times S^1) \big/ (S^1 \vee S^1) = S^2$ индуцирует тривиальный гомоморфизм в гомотопических группах, но индуцирует нетривиальный гомоморфизм в приведённых гомологиях.

7. Докажите, что композиция
$$S^1 \times S^1 \times S^1 \to (S^1 \times S^1 \times S^1) \big/ sk_2(S^1 \times S^1 \times S^1) = S^3 \xrightarrow{\text{Хопф}} S^2$$
индуцирует тривиальное отображение как в гомотопических, так и в приведённых гомологических группах, но не гомотопно постоянному отображению.

8. Докажите тот же факт для отображения
$$S^{2n-2} \times S^3 \xrightarrow{\text{проекция}} (S^{2n-2} \times S^3) \big/ (S^{2n-2} \vee S^3) = S^{2n+1} \xrightarrow{\text{Хопф}} \mathbb{CP}^n.$$

9. Вычислите кольцо когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ проективизации касательного расслоения к
   (a) двумерной сфере;
   (b) двумерному тору;
   (c) двумерному проективному пространству;
   (d) бутылке Клейна.