Топология, 4 семестр, 2008/09 уч.г.

Листок №11, 28 апреля 2009 года.

1. Докажите, что тривиальность всех приведённых гомологических групп односвязного клеточного пространства равносильна тривиальности всех его гомотопичеких групп.

2. Постройте неодносвязное клеточное пространство с тривиальными приведёнными гомологиями.

3. Пусть односвязное клеточное пространство X является гомологической n-сферой (т. е. имеет такие же гомологии, как и n-мерная сфера). Докажите, что X гомотопически эквивалентно n-мерной сфере.

4. Докажите, что любое отображение f пространства X в пространство Y гомотопически эквивалентно вложению, а именно существует пространство $\widetilde{Y}$ и отображения $\widetilde{f}\colon X \to \widetilde{Y}$ и $g\colon Y \to \widetilde{Y}$, такие, что g является гомотопической эквивалентностью, $\widetilde{f}$ является вложением и $g \circ f \sim \widetilde{f}$.

5. Пусть f – отображение пространства X в пространство Y. Докажите, что отображение $f_*\colon H_*(X) \to H_*(Y)$ является изоморфизмом тогда и только тогда когда отображение $f^*\colon H^*(Y) \to H^*(X)$ является изоморфизмом.

6. Любое отображение f пространства X в пространство Y гомотопически эквивалентно сильному расслоению в смысле Серра, а именно пусть $\widetilde{X}$ – пространство пар (x, s), где $x \in X$, а s есть путь пространства Y, начинающийся в точке $f(x)$. Определим отображения $p(f)\colon \widetilde{X} \to Y$ и $\phi(f)\colon \widetilde{X} \to X$ формулами
$$[p(f)](x, s) = s(1), \quad [\phi(f)](x, s) = x.$$
Докажите, что $\phi(f)$ является гомотопической эквивалентностью, $p(f)$ является сильным расслоением в смысле Серра и $f \circ \phi(f) \sim p(f)$.