**Топология, 4 семестр, 2008/09 уч.г.**

Листок N 2, 17 февраля 2009 года.

**1.** а) Докажите, что любой диффеоморфизм $\mathbb{CP}^{2n}$ в себя сохраняет ориентацию. б) Приведите пример диффеоморфизма $\mathbb{CP}^{2n+1}$ в себя, обращающего ориентацию.

**2.** а) Докажите, что любое непрерывное отображение $\mathbb{CP}^{2n}$ в себя имеет неподвижную точку. б) Докажите, что существует непрерывное отображение $\mathbb{CP}^{2n+1}$ в себя без неподвижных точек.

**3.** Докажите утверждения, аналогичные задаче 2, для $\mathbb{RP}^{2n}$ и $\mathbb{RP}^{2n+1}$.

**4.** а) Положим $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейное отображение, заданное целочисленной матрицей $A$. Оно очевидно факторизуется до некоторого отображения $f_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$. Вычислите для $f_A$ число Лефшеца $L_A$.

б) Докажите, что любое отображение, гомотопное $f_A$, имеет по крайней мере $|L_A|$ геометрически различных неподвижных точек.

**5.** Вычислите кольцо когомологий $H^*(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z})$ (кольцо $H^*(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}_2)$ Вам наверняка известно).

**6.** Пусть $X, Y$ – клеточные пространства. Рассмотрим их букет $X \vee Y$. Положим $p_X, p_Y$ – проекции букета на $X$ и $Y$ соответственно. Пусть $a \in H^m(X), b \in H^n(Y)$ причём $n, m \geq 1$. Докажите, что $p_X^*(a)p_Y^*(b) = 0$.

**7.** Пусть $X$ – клеточное пространство. Докажите, что в надстройке $\Sigma X$ когомологическое умножение тривиально, то есть для любых $m, n \geq 1$ и $a \in H^n(\Sigma X), b \in H^m(\Sigma X)$ выполняется $ab = 0$.

**8.** (Двойственность Александера) Пусть $A \subset S^n$ – гладкое подмногообразие. Докажите, что $H_p(A) \cong H^{n-1-p}(S^n \backslash A), H^p(A) \cong H_{n-1-p}(S^n \backslash A)$ при $1 \leq p \leq n-2$.

**9.** Вычислите кольцо когомологий комплексного грассманиана $G_{2,4}^{\mathbb{C}}$.