Топология, 4 семестр, 2008/09 уч.г.

Листок N 3, 24 февраля 2009 года.

1. Вычислить фундаментальную группу букета окружностей.

2. Построить сфероид, обратный в $\pi_n(X, x_0)$ данному сфероиду $f : I^n \to X$, $f(\partial I^n) = x_0$.

3. Доказать, что $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$ при всех $n \geqslant 0$.

4. Докажите, что проекция ленты Мёбиуса на её среднюю линию является нетривиальным локально тривиальным расслоением.

5. Докажите, что следующие известные вам отображения являются локально тривиальными расслоениями а) $S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$; б) $S^{4n+3} \to \mathbb{HP}^n$.

6. Пусть $E \to B$ является накрытием, причём E, B линейно связны. Докажите, что $\pi_n(E) \cong \pi_n(B)$ при $n \geqslant 2$.

7. а) Докажите, что $\pi_n(S^1) = 0$ при $n \geqslant 2$.

   б) Докажите то же самое для букета окружностей.

8. а) Найдите $\pi_2(\mathbb{RP}^2)$.

   б) Найдите $\pi_n(T^2)$.

   в) Докажите, что для любой связной двумерной поверхности X, отличной от S^2 и $\mathbb{RP}^2$ выполняется $\pi_n(X) = 0$ при $n \geqslant 2$.

9. а) Найдите $\pi_k(\mathbb{CP}^n)$ при $k \leqslant 2n+1$.

   б) Найдите $\pi_3(\mathbb{RP}^2)$.

10. Докажите, что у следующих расслоений нет сечений а) $S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$; б) $S^{4n+3} \to \mathbb{HP}^n$.

11. Пусть X, Y – связные замкнутые гладкие многообразия. Пусть $f\colon X \to Y$ – субмерсия, то есть отображение, дифференциал которого в каждой точке эпиморфен. Докажите, что $f\colon X \to Y$ является локально тривиальным расслоением.