Топология, 4 семестр, 2008/09 уч.г.

Листок № 4, 3 марта 2009 года.

1. Доказать точность гомотопической последовательности локально тривиального расслоения в члене $\pi_n(\mathcal{F})$: $\ker i_* = \operatorname{im}\partial$. (На лекции это не обсуждалось.)

2. Вычислить π_1, π_2 и π_3 букета $S^2 \vee S^3$.

3. Пусть X, Y – клеточные пространства. Если X имеет единственную вершину и не содержит клеток размерности $1, \dots, p$, а Y имеет единственную вершину и не содержит клеток размерности $1, \dots, q$, то
а) $\pi_n(X \vee Y) = \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)$ при $n \le p+q$ (Указание: воспользуйтесь вложением $X \vee Y \subset X \times Y$);
б) при любом n группа $\pi_n(X \vee Y)$ содержит прямое слагаемое, изоморфное $\pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)$.

4. а) Докажите, что $\pi_3(S^2 \vee S^2) = \mathbb{Z}^2 \oplus G$, где $G = \mathbb{Z}$, либо $G = \mathbb{Z}_k$;
б) Докажите, что $\pi_3(S^2 \vee S^2) = \mathbb{Z}^3$.

5. Вычислить n-ную гомотопическую группу $\pi_n\left(\bigvee_{i\in\mathbb{N}} S^n_i\right)$ букета счётного числа n-мерных сфер.

6. Вычислить $\pi_n(S^1 \vee S^n)$.

7. а) Докажите, что отображение $i_*\colon \pi_k(U(n)) \to \pi_k(U(n+1))$, индуцированное естественным вложением $i\colon U(n) \to U(n+1)$, является изоморфизмом при достаточно больших n. Группа $\pi_k(U(n))$, где n велико, обозначается через $\pi_k(U(\infty))$;
б) Найдите $\pi_k(U(\infty))$ при $k \le 3$.

8. а) Докажите аналогичное предыдущей задаче свойство стабилизации для $\pi_k(SO(n))$;
б) Найдите $\pi_k(SO(\infty))$ при $k \le 2$.

9. а) Докажите, что при $k < n$ многообразие $V_{k,n}$ $(n-k-1)$-связно;
б) Докажите, что $\pi_r(G_{k,n}) = \pi_{r-1}(SO(k))$ при $1 < r < n-k$;
в) Докажите свойство стабилизации по n для $\pi_r(G_{k,n})$.

10. а) Построить нетривиальное локально тривиальное расслоение $E \to S^1$ со слоем S^2 над окружностью;

    б) вычислить $\pi_1(E)$ и $\pi_2(E)$;

    в) вычислить действие $\pi_1(E)$ на $\pi_2(E)$;

    г) привести пример непрерывного отображения $f : E \to E$, которое гомотопно тождественному, имеет неподвижную точку: $f(e) = e$, но индуцирует нетривиальный автоморфизм $f_* : \pi_2(E, e) \to \pi_2(E, e)$, $f_* \ne \mathbf{1}$.