Топология, 4 семестр, 2008/09 уч.г.
Листок № 5, 10 марта 2009 года.

1. Приведите пример такого отображения $f\colon X \to Y$ двух линейно связных топологических пространств, у которого все слои гомеоморфны между собой, но которое не удовлетворяет свойству накрывающей гомотопии.

2. Пусть $E \to B$ – локально тривиальное расслоение, не являющееся тривиальным, а $f\colon X \to B$ – сюръективное отображение. Может ли расслоение f^*E быть тривиальным?

3. *Доказать теорему о накрывающей гомотопии для отображений клеточных пространств:*

   Пусть $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение, X — клеточное пространство, Y — его клеточное подпространство (возможно пустое),

   $$Z = (\{0\} \times X) \cup (I \times Y) \subset I \times X, \quad I = [0; 1],$$

   а отображение $g : Z \to E$ накрывает отображение $f : Z \to B$, причём последнее продолжается до гомотопии $F : I \times X \to B$. Тогда g продолжается до гомотопии $G : I \times X \to E$, накрывающей F.

4. Приведите пример отображения $f\colon X \to Y$, у которого не все слои гомеоморфны между собой, но которое удовлетворяет свойству накрывающей гомотопии.

5. Пусть $E \to B$ – локально тривиальное расслоение, а $f_{0,1}\colon X \to B$ – два гомотопных отображения конечного клеточного пространства X в B. Докажите, что расслоения f_0^*E и f_1^*E изоморфны.

6. Докажите, что любое локально тривиальное расслоение над стягиваемым конечным клеточным пространством тривиально.

7. Пусть X и Y — топологические пространства, $F : X \times Y \to X \times Y$ — непрерывное отображение такое, что

   - $F(x, y) = (x, f(x, y))$ для всех $x \in X$, $y \in Y$;
   - для любого фиксированного $x \in X$ отображение $y \mapsto f(x, y)$ является гомеоморфизмом Y.

   Верно ли, что F — гомеоморфизм?