Топология, 4 семестр, 2008/09 уч.г.

Листок № 7, 31 марта 2009 года.

1. Докажите изоморфизм колец когомологий
$$H^*(U(n)) \cong H^*(S^1 \times S^3 \times \ldots \times S^{2n-1}).$$

2. Докажите изоморфизм колец когомологий
$$H^*(V^{\mathbb{C}}_{k,n}) \cong H^*(S^{2(n-k)+1} \times S^{2(n-k)+3} \times \ldots \times S^{2n-1}).$$

3. Найдите кольцо когомологий $H^*(\mathbb{CP}^n)$, пользуясь спектральной последовательностью расслоения $S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$.

4. Докажите изоморфизм колец когомологий
$$H^*(V^{\mathbb{R}}_{2,n}; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} H^*(S^{2n-3}; \mathbb{Q}), & \text{если } n \text{ нечётно,} \\ H^*(S^{n-1} \times S^{n-2}; \mathbb{Q}), & \text{если } n \text{ чётно.} \end{cases}$$

5. (a) Пусть n нечётно. Докажите, что (мультипликативно)
$$H^*(SO(n); \mathbb{Q}) \cong H^*(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{2n-3}; \mathbb{Q}).$$
(Воспользуйтесь расслоением $SO(n) \xrightarrow{SO(n-2)} V^{\mathbb{R}}_{2,n}$).

   (b) Покажите, что отображение
$$H^*(SO(2m+1); \mathbb{Q}) \to H^*(SO(2m-1); \mathbb{Q})$$
эпиморфно.

   (c) Покажите, что отображение
$$H^*(SO(2m); \mathbb{Q}) \to H^*(SO(2m-1); \mathbb{Q})$$
эпиморфно.

   (d) Пусть n чётно. Докажите, что (мультипликативно)
$$H^*(SO(n); \mathbb{Q}) \cong H^*((S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{2n-5}) \times S^{n-1}; \mathbb{Q}).$$
(Воспользуйтесь расслоением $SO(n) \xrightarrow{SO(n-1)} S^{n-1}$ и предыдущим пунктом).