Топология, 4 семестр, 2008/09 уч.г.
Листок № 8, 7 апреля 2009 года.

1. Пусть известны гомотопические группы пространства X найдите гомотопические группы пространства петель ΩX.

2. (a) Докажите, что

$$H^q(\Omega S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{при } q = 0, n-1, 2(n-1), \ldots, \\ 0, & \text{если } q \text{ не делится на } n-1. \end{cases}$$

   (b) Докажите, что существуют образующие $x_k \in H^{k(n-1)}(\Omega S^n)$, такие, что $x_k x_l = \alpha_{k,l} x_{k+l}$, где

$$\alpha_{k,l} = \begin{cases} C^l_{k+l}, & \text{если } n \text{ нечётно,} \\ C^{l/2}_{(k+l)/2}, & \text{если } n \text{ чётно и } k, l \text{ чётны,} \\ C^{l/2}_{(k+l-1)/2}, & \text{если } n \text{ чётно, } k \text{ нечётно и } l \text{ чётно,} \\ 0, & \text{если } n \text{ чётно и } k, l \text{ нечётны.} \end{cases}$$

3. Пусть $E \xrightarrow{F} B$ – расслоение над клеточным пространством B. Пусть группа $H^*(F)$ свободна и пусть существуют такие элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in H^*(E)$, что их ограничение в слой над каждой точкой образует базис в когомологиях этого слоя. Докажите, что когомологии тотального пространства E являются свободным модулем над когомологиями базы B с базисом $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$.

4. Пусть ξ – вещественное векторное расслоение размерности n над клеточным пространством B. Зафиксируем в слоях евклидову структуру и обозначим через $D(\xi)$ и $S(\xi)$ пространства шарового и сферического расслоений, ассоциированных с ξ. Пространство $T(\xi) = D(\xi)/S(\xi)$ называется пространством Тома расслоения ξ. Докажите, что если расслоение ξ ориентируемо, то имеют место изоморфизмы Тома

$$H_q(B) \cong \widetilde{H}_{q+n}(T(\xi)), \quad H^q(B) \cong \widetilde{H}^{q+n}(T(\xi)).$$