Экзамен по топологии, II курс, осень 2009

1. Какие значения может принимать степень отображения $S^4 \to S^2 \times S^2$?

2. Вычислить гомотопические группы π_1, π_2 и π_3 букета $(S^3 \times S^3) \vee S^2$.

3. Выяснить для пространств $S^3 \times \mathbb{C}P^2$ и $S^2 \times S^5$:

   а) в каких размерностях их гомотопические группы совпадают, а каких — различаются;

   б) вычислить их группы целочисленных гомологий во всех размерностях;

   в) гомеоморфны ли эти пространства.

4. Вычислить группы гомологий с целыми коэффициентами многообразия PTK^2 касательных прямых к бутылке Клейна.

5. Вычислить кольцо когомологий специальной ортогональной группы $SO(5, \mathbb{R})$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

6. Пусть на $\mathbb{R}^n$ существует билинейная операция умножения без делителей нуля. Доказать, что тогда n – степень числа 2.

7. а) Выразить циклы, двойственные по Пуанкаре классам Штифеля–Уитни универсального расслоения над грассманианом $G_2(\mathbb{R}^5)$, через циклы Шуберта.

   б) Выразить циклы, двойственные по Пуанкаре классам Штифеля–Уитни касательного расслоения к грассманиану $G_2(\mathbb{R}^5)$, через циклы Шуберта.

   в) Вычислить числа Штифеля–Уитни грассманиана $G_2(\mathbb{R}^5)$.