Комплексные ряды vs. Вещественные ряды

Задача 1. a) Пусть радиус сходимости ряда $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, равен R. Докажите, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ абсолютно сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

b) Докажите, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, $a_i \in \mathbb{C}$, сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$ для некоторого $0 \leqslant R \leqslant \infty$.

c) Что можно сказать об области сходимости ряда $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z^i$ при $a_i \in \mathbb{C}$?

d) Докажите, что такие ряды определяют (во внутренних точках своей области сходимости) дифференцируемую функцию комплексной переменной.

Задача 2. Постройте степенной ряд,

a) расходящийся на всей границе области сходимости;

b) сходящийся на всей границе области сходимости;

c) расходящийся ровно в n точках на границе области сходимости, $n > 0$;

d^*) расходящийся в счётном множестве точек на границе области сходимости.

Задача 3. a) Докажите, что ряд $\exp(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^n/n!$ сходится при любом комплексном z.

b) Вычислите $d\exp(z)/dz$.

c) Докажите, что $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

d) Докажите, что $\exp(a + bi) = \exp(a)(\cos(b) + i\sin(b))$ для $a, b \in \mathbb{R}$.

Задача 4. a) Выразите $\sin(z) = z - z^3/3! + z^5/5! - \ldots$ и $\cos(z) = 1 - z^2/2! + z^4/4! - \ldots$, используя комплексные числа, $\exp(z)$ и арифметические действия.

b) Найдите область значений функций $\exp(z)$, $\sin(z)$, $\cos(z)$.

Задача 5. a) Пусть $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, $a_i \in \mathbb{C}$. Определим периодическую функцию вещественной переменной $\phi(t) = f(\exp(it))$. Разложите $\phi(t)$ в ряд Фурье.

b) Аналогичный вопрос для $f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z^i$, $a_i \in \mathbb{C}$.

Задача 6. a) Найдите область сходимости ряда $\ln(1 + z) = z - z^2/2 + z^3/3 - \ldots$.

b) Вычислите $d\ln(z)/dz$.

c) Докажите, что $\exp(\ln(z)) = z$, $\ln(\exp(z)) = z$ там, где левая часть определена.

d) На какую область можно продолжить $\ln(z)$ с сохранением этого свойства?

Задача 7. a) Выразите $\operatorname{arctg}(z)$, используя комплексные числа, $\ln(z)$ и арифметические действия. На какой области он может быть определён?

b) Выразите $\arcsin(z)$, используя комплексные числа, $\ln(z)$, $\sqrt{z}$ и арифметические действия. На какой области он может быть определён?