Вокруг условий Коши-Римана

Задача 1. Пусть $f(z)$ — голоморфная фунция. Докажите, что $\overline{f(\overline{z})}$ голоморфна на своей области определения.

Задача 2. Запишите в полярных координатах

a) dz и $d\overline{z}$;

b) $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial\overline{z}$;

c) условия Коши-Римана.

Определение 1. Вещественная функция двух переменных $f(x, y)$ называется *гармонической*, если $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)f = 0$.

Задача 3. a) Пусть $f(z)$ — голоморфная фунция, докажите, что $\Re e f(x+iy)$ и $\Im m f(x+iy)$ являются гармоническими функциями вещественных переменных x и y.

b) Пусть $\phi(x, y)$ — гармоническая функция на $\mathbb{R}^2$. Докажите, что найдётся голоморфная функция $f(z)$, такая что $\phi(x, y) = \Re e f(x + iy)$.

Подсказка: Постройте дифференциал $\Im m f(x + iy)$ и убедитесь, что эта 1-форма замкнута.

Задача 4. a) Какова размерность пространства гармонических многочленов от двух переменных степени k? Вещественной частью каких голоморфных функций они являются?

b) Докажите, что всякий многочлен однозначно представим в виде $\sum_n (x^2 + y^2)^n P_n(x, y)$, где $P_n(x, y)$ — гармонические многочлены.

Задача 5. Вычислите интегралы по окружности $|z| = R$:

a) $\oint z^k \overline{z}^l dz$, $k, l \in \mathbb{Z}$;

b) $\oint z^k \overline{z}^l d\overline{z}$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. Вычислите $\oint f(z)dz$ по границе прямоугольника $a \leqslant \Re e z \leqslant b$, $c \leqslant \Im m z \leqslant d$ для

a) $f(z) = \overline{z}$;

b) $f(z) = z\overline{z}$.

Задача 7. a) Пусть $f'(z)$ непрерывна. Выведите теорему Коши для $\oint f(z)dz$ из теоремы Стокса.

b) Докажите, что комплекснозначная функция $f(x+iy)$ с непрерывным дифференциалом $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является голоморфной тогда и только тогда, когда $\oint f(z)dz = 0$ для любого гладкого замкнутого контура.

c) Для каких функций $\oint f(z)d\overline{z}$ не зависит от контура?