Рациональные отображения

Задача 1. a) Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Докажите, что производная функции $\frac{az+b}{cz+d}$ не обращается в ноль тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$. Что это за функции в противном случае?

b) Докажите, что при $ad - bc \neq 0$ *дробно-линейные* преобразования $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ задают взаимно-однозначные отображения из множества $\mathbb{C} \cup \infty$ в себя? Что при этом является образом и прообразом ∞?

c) Докажите, что *невырожденные* ($ad - bc \neq 0$) дробно-линейные преобразования образуют группу. Какие дроби при этом задают одинаковые отображения?

d) Сопоставим дроби $\frac{az+b}{cz+d}$ матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Докажите, что это задаёт изоморфизм группы невырожденных дробно-линейных преобразований и группы $PGL(2)$ (фактор группы обратимых матриц $GL(2)$ по подгруппе скалярных матриц).

Задача 2. a) Докажите, что при невырожденном дробно-линейном преобразовании всякая прямая переходит в прямую или окружность. Какие прямые переходят в прямые?

b) Докажите, что при невырожденном дробно-линейном преобразовании всякая окружность переходит в прямую или окружность. Какие окружности переходят в прямые?

Задача 3. a) Докажите, что дробно-линейное преобразование взаимно-однозначно отображает верхнюю полуплоскость $\{z | \Im m z \geqslant 0\} \cup \infty$ в себя тогда и только тогда, когда $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$.

b) Какие дробно-линейные преобразования взаимно-однозначно отображают единичный круг $|z| \leqslant 1$ в себя?

c) Какие дробно-линейные преобразования взаимно-однозначно отображают единичный круг в верхнюю полуплоскость?

Задача 4. a) Куда переходят прямые и полуплоскости при преобразовании $z \to z^2$? Для каких полуплоскостей это преобразование взаимно-однозначное?

b) Опишите прообразы прямых и полуплоскостей при преобразовании $z \to z^2$.

Задача 5. Куда переходят при преобразовании $z \to z + 1/z$

a) окружности $|z| = R$;

b) круги $|z| \leqslant R$;

c) лучи $\arg(z) = \phi$;

d) секторы $\phi_1 \leqslant \arg(z) \leqslant \phi_2$.