Практикум-1

Задача 1. Разложите в ряд Лорана в $\mathbb{C} \setminus 0$ функцию e^{-1/z^2}. Будет ли она ограничена в окрестности нуля?

Задача 2. Разложите в ряд Лорана функцию $\frac{1}{z-1}$ в области

a) $|z| < 1$;

b) $|z| > 1$.

Задача 3. Пусть $|a| < |b|$. Разложите в ряд Лорана функцию $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ в области

a) $|z| < |a|$;

b) $|a| < |z| < |b|$;

c) $|b| < |z|$.

Задача 4. Пусть $f(z) = a_{-n}z^{-n} + a_{-n+1}z^{-n+1} + \dots + a_0 + a_1 z + \dots$ для $0 < |z| < R$. Рассмотрим контур $\gamma_r = \{z | |z| = r\}$, причём $r < R$. Вычислите

a) $\oint_{\gamma_r} f(z)dz$;

b) $\oint_{\gamma_r} f'(z)/f(z)dz$, предполагая $f(z) \neq 0$ при $0 < |z| \leqslant r$;

c) $\oint_{\gamma_r} 1/f(z)dz$ при $n >= -2$, предполагая $f(z) \neq 0$ при $0 < |z| \leqslant r$.

Задача 5. a) Найдите $\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2}$, где γ_R — контур, состоящий из отрезка $[-R, R]$ вещественной оси и полуокружности $\omega_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \Im m z \geqslant 0\}$.

b) Докажите, что $\int_{\omega_R} \frac{dz}{1+z^2} \to 0$ при $R \to +\infty$.

c) Найдите $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Задача 6. Найдите методом, аналогичным методу задачи 5, следующие интегралы:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^k}$;

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\pi i t x)\, dx}{1+x^2}$;

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)\, dx}{1+x^2}$;

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos(x^3)\, dx}{1-x^3+x^6}$;

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)\, dx}{x+x^3}$;

g^*) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)\, dx}{x}$.