Немного тригонометрии

Задача 1. a) Докажите, что для каждого гладкого контура C_n, охватывающего точки z, $-n\pi, \ldots, n\pi$ и не охватывающего точек вида $a\pi$ при $|a| > n$, имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \xi}{\xi - z}\, d\xi = \operatorname{ctg} z - \sum_{m=-n}^{n} \frac{1}{z - m\pi}.$$

b) Докажите, что для того же контура имеет место равенство

$$\frac{z}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \xi}{\xi(\xi - z)}\, d\xi = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} - \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \setminus 0 \\ -n \leqslant m \leqslant n}} \left(\frac{1}{z - m\pi} + \frac{1}{m\pi} \right).$$

c) Исследуйте поведение левой и правой частей равенств из предыдущих пунктов при $n \to \infty$. Докажите равенство

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus 0} \left(\frac{1}{z - m\pi} + \frac{1}{m\pi} \right).$$

Задача 2. a) Придайте смысл бесконечному произведению и докажите, что имеет место равенство

$$\sin z = e^{H(z)} \cdot z \cdot \prod_{m \in \mathbb{Z} \setminus 0} \left(1 + \frac{z}{m\pi} \right),$$

где $H(z)$ — некоторая функция, голоморфная на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

b) Докажите, используя понятие логарифмической производной f'/f, что в предыдущем разложении $H' = 0$.

c) Докажите, что $H \equiv 0$.

Задача 3. Докажите, что коэффициенты a_k в разложении $\operatorname{ctg} z = 1/z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{2k-1}$ равны $-2\zeta(2k)/\pi^{2k}$, где $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$. Найдите $\zeta(2)$, $\zeta(4)$.

Определение 1. Определим *числа Бернулли* через разложение в ряд Лорана

$$\frac{1}{e^z - 1} = \sum_{k \geqslant 0} B_k z^{k-1}/k!.$$

Задача 4. a) Докажите, что B_k равны нулю для нечётных k, больших единицы.

b) Постройте рекуррентную формулу для чисел Бернулли.

c) Выразите $\zeta(2s)$ через числа Бернулли.

d^*) Докажите, что $S_k(n) = 1^k + \cdots + n^k$ является многочленом степени $k+1$ от n, и выразите его коэффициенты через числа Бернулли.