Эллиптические функции

Определение 1. Пусть $\omega, \omega' \in \mathbb{C}$ и $\omega/\omega' \notin \mathbb{R}$. Мероморфная функция $f(z)$ называется *эллиптической (двоякопериодической)* если $f(z+\omega) = f(z+\omega') = f(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Определение 2. Множество точек $\Pi = \{\alpha\omega + \alpha'\omega' \mid \alpha, \alpha' \in [0,1)\}$ называется *параллелограммом периодов*, множество точек $L = \{n\omega + n'\omega' \mid n, n' \in \mathbb{Z}\}$ называется *решеткой периодов*.

Задача 1. a) Докажите, что сумма вычетов полюсов эллиптической функции на параллелограме периодов равна нулю.

b) Докажите, что сумма кратностей полюсов эллиптической функции на параллелограме периодов равна сумме кратностей нулей.

Определение 3. Определим *℘-функцию Вейерштрасса* как ряд

$$\wp = \frac{1}{z^2} + \sum_{\xi \in L \setminus 0} \left(\frac{1}{(z-\xi)^2} - \frac{1}{\xi^2} \right).$$

Задача 2. a) Докажите, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно по z на любом компакте, не пересекающемся с решеткой L.

b) Докажите, что $\wp$-функция голоморфна вне решетки L.

Задача 3. a) Докажите, что $\wp$-функция Вейерштрасса четная и имеет полюса второго порядка на решетке периодов.

b) Докажите, что производная $\wp'$ — эллиптическая функция. Напишите ряд для нее.

c) Докажите, что $\wp$ — эллиптическая функция.

Задача 4. Докажите, что $\wp(z) = 1/z^2 + 3e_2 z^2 + 5e_3 z^4 + 7e_4 z^6 + \ldots$, где

$$e_k = \sum_{\xi \in L \setminus 0} \xi^{-2k}.$$

Задача 5. a) Докажите, что $\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$, где $g_2 = 60e_2$, $g_3 = 140e_3$.

b) Определим функцию (многозначную) $\mathcal{E}(z)$ равенством

$$\mathcal{E}(z) = \int_z^\infty \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}.$$

Докажите, что $\mathcal{E}(z)$ — функция, обратная $\wp(z)$

Задача 6. a) Пусть $f(z)$ — четная эллиптическая функция, $a_1, \ldots, a_n, -a_1, \ldots, -a_n$ — её нули (кратные повторяются), $b_1, \ldots, b_n, -b_1, \ldots, -b_n$ — её полюса (кратные повторяются). Докажите равенство

$$f(z) = const \cdot \prod_{i=1}^{n} (\wp(z) - \wp(a_i)) / \prod_{j=1}^{n} (\wp(z) - \wp(b_i)).$$

b) Докажите, что любая эллиптическая функция представляется рациональной функцией от $\wp$ и $\wp'$.

Задача 7*. Докажите, что $\wp(z_1 + z_2) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}\right]^2 - \wp(z_1) - \wp(z_2)$.