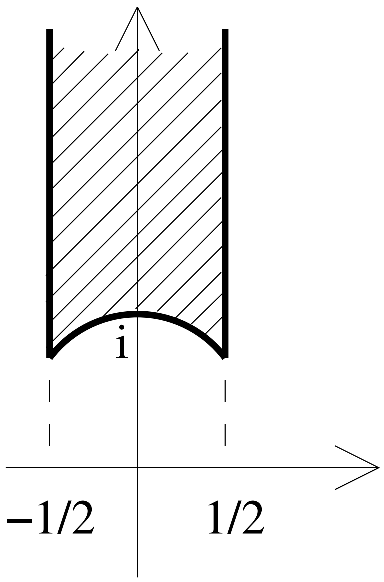
Модулярные функции

Пусть $\mathcal{H} = \{\tau | \ \Im m(\tau) > 0\}$— верхняя комплексная полуплоскость, $SL_2(\mathbb{Z})$ — группа матриц 2×2 с целыми коэффициентами и определителем 1, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — элементы $SL_2(\mathbb{Z})$. Мы уже знаем из листка 3, что $SL_2(\mathbb{Z})$ действует на $\mathcal{H}$ взаимно-однозначными отображениями.

Задача 1. Пусть $\mathcal{M}$— следующая фигура в $\mathcal{H}$:



a) Докажите, что преобразованиями S, T и T^{-1} можно перевести любую точку $\mathcal{H}$ в $\mathcal{M}$. *Подсказка: максимизируйте* $\Im m f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$.

b) Докажите, что $\mathcal{M}$ — фундаментальная область действия $PSL_2(\mathbb{Z})$ на $\mathcal{H}$. В частности, группа $SL_2(\mathbb{Z})$ порождена элементами S и T.

c) Что происходит на границе $\mathcal{M}$?

Определение 1. Пусть $f(\tau)$ — аналитическая функция на $\mathcal{H}$. Будем говорить, что f — *модулярная функция* степени k, если для любой матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ выполнено $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k \cdot f(\tau)$

Задача 2. Докажите, что при нечетных k в этом случае $f(\tau) = 0$.

Задача 3. Пусть F — функция на множестве решеток в $\mathbb{C}$, такая что $F(\lambda L) = \lambda^{-k} F(L)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть $f(\tau) = F(\langle 1, \tau\rangle)$— значение F на решетке, порожденной 1 и τ. Докажите, что f—модулярная функция степени k и что F определяется ее значениями.

Определение 2. Определим *ряд Эйзенштейна*

$$e_k(\tau) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}}.$$

Задача 4. Докажите, что при $k \geqslant 2$ ряд для e_k сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, и что e_k— модулярная функция веса $2k$. Какая функция на множестве решеток ей соответствует?

Задача 5. Докажите, что любая модулярная функция — периодическая с периодом 1. Тем самым, ее можно рассматривать как функцию от $q = e^{2\pi i\tau}$.

"Бесконечная"точка $q = 0$ дополняет модулярную область $\mathcal{M}$ до компакта.

Определение 3. Модулярная функция называется *модулярной формой*, если она не имеет особенности в этой точке (эквивалентно, имеет предел при $\tau \to i\infty$).

Задача 6. Докажите, что e_k— модулярная форма со значением $2\zeta(2k)$ в точке $q = 0$.

Задача 7. Пусть $v_x(f)$— кратность нуля/полюса функции f в точке x. Докажите, интегрируя логарифмический вычет f'/f по границе $\mathcal{M}$, что для модулярной функции f степени k

$$v_\rho(f)/3 + v_i(f)/2 + \sum_{x\in\mathcal{M}, x\neq\rho,i} v_x(f) + v_{i\infty}(f) = k/12.$$

Задача 8. Пусть M_k — пространство модулярных форм веса k. Докажите, что $\dim M_k = 0$ при нечетном k, $k < 0$ и $k = 2$, $\dim M_k = 1$ при $k = 0, 4, 6, 8, 10$ и $\dim M_k = 2$ при $k = 12$.

Задача 9. Пусть, как в листке 5, $g_2 = 60e_2$, $g_3 = 140e_3$. Докажите, что модулярная форма $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ имеет единственный нуль при $q = 0$.

Подсказка: напомним, что $\zeta(4) = \pi^4/90, \zeta(6) = \pi^6/945$.

Задача 10. a) Докажите, что умножение на Δ — взаимно–однозначное отображение пространства модулярных форм M_k в пространство S_{k+12} модулярных форм, равных нулю при $q = 0$.

b) Найдите размерность M_k.

Задача 11. a) Пусть $j = g_2^3/\Delta$. Докажите, что j имеет единственный полюс порядка 1 и принимает каждое значение ровно один раз.

b) Докажите, что любая модулярная функция веса ноль без существенных особенностей (в том числе при $q = 0$) — рациональная функция от j.