Тета-функции

Пусть $\tau \in \mathbb{C}$, $\Im m(\tau) > 0$, пусть $\Gamma = \{m + n\tau | m, n \in \mathbb{Z}\}$ — решетка, порожденная 1 и τ.

Определение 1. Обозначим $\Theta_n(\Gamma)$ пространство целых аналитических функций f, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} f(z+1) &= f(z), \\ f(z+\tau) &= e^{-2\pi i n z} f(z). \end{aligned}$$

Сами функции из этого пространства будем называть *тета-функциями.*

Часто в явных формулах удобно пользоваться параметром $q = e^{2\pi i \tau}$.

Задача 1. a) Пусть f — аналитическая функция, такая что $f(z+1) = f(z)$. Докажите, что $f(z) = g(e^{2\pi i z})$ для некоторой аналитической функции g. Выведите отсюда, что f разлагается в ряд Фурье $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k z}$.
b) Пусть $f \in \Theta_n(\Gamma)$. Какое соотношение на коэффициенты c_k в разложении функции f дает условие $f(z+\tau) = e^{-2\pi i n z} f(z)$?

Задача 2. a) Докажите, что $\dim \Theta_1(\Gamma) = 1$, выпишите ряд для такой функции.
b) Докажите, что

$$\dim \Theta_n(\Gamma) = \begin{cases} n, & n > 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

В дальнейшем будем предполагать $n > 0$.

Задача 3. a) Докажите, что каждая функция $f \in \Theta_n(\Gamma)$ имеет ровно n нулей (с учетом кратности), с точностью до сдвига на элементы Γ.
b) Вычислите сумму этих нулей с точностью до элемента решетки. Найдите нули функции $f \in \Theta_1(\Gamma)$.

Задача 4. a) Докажите, что преобразования A_1 и A_2, определённые как

$$(A_1 f)(z) = f(z + 1/n), \qquad (A_2 f)(z) = e^{2\pi i z} f(z + \tau/n)$$

переводят пространство $\Theta_n(\Gamma)$ в себя.
b) Вычислите A_1^n, A_2^n, $A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1}$ в пространстве $\Theta_n(\Gamma)$.
c) Докажите, что в линейном пространстве $\Theta_n(\Gamma)$ существует базис $\{\theta_\alpha | \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ такой, что

$$A_1 \theta_\alpha = \epsilon^\alpha \theta_\alpha, \quad A_2 \theta_\alpha = p \theta_{\alpha+1},$$

где $\epsilon, p \in \mathbb{C}$, $\epsilon^n = 1$. Чему может равняться число p?

Задача 5. Найдите нули функции $\theta_\alpha(z)$.

Задача 6*. Пусть $n = 3$. Докажите, что $\theta_0^3 + \theta_1^3 + \theta_2^3 + \kappa \theta_0 \theta_1 \theta_2 = 0$, где $\kappa \in \mathbb{C}$ зависит только от τ.

Задача 7. a) Пусть $f \in \Theta_n(\Gamma)$. Докажите, что $\ln(f(z))''$ — эллиптическая функция.
b^*) Выразите $\wp(z)$ через тета-функции и их производные.