Практикум-2

Задача 1. Постройте голоморфную функцию, переводящую взаимно-однозначно заданную область в верхнюю полуплоскость.

a) Сегмент круга $|z| < 1$, $\Im m(z) > k$.

b) Сектор круга $|z| < 1$, $\phi < \arg(z) < \psi$.

c) Полосу $a < \Im m(z) < b$.

d) Полуполосу $a < \Im m(z) < b$, $\Re e(z) < c$.

e) Верхнюю полуплоскость без отрезка $[0, i]$.

f) Плоскость без отрезка $[0, 1]$.

g^*) Внутренность параболы $\Im m(z) > \Re e(z)^2$.

h^*) Внутренность эллипса.

Задача 2 (интеграл Кристоффеля-Шварца). Для $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $\Im m(z) > 0$ определим z^α как комплексное число с модулем $|z|^\alpha$ и аргументом $\alpha \arg(z)$.

a) Пусть $t_1 < \cdots < t_n, \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, причём $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = n - 2$. Докажите, что фунция на верхней полуплоскости, определённая как

$$\int_0^z (w - t_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (w - t_n)^{\alpha_n - 1}$$

переводит вещественную прямую в ломаную с углами $\alpha_1 \pi, \ldots, \alpha_n \pi$.

b) Докажите, что если эта ломаная не самопересекается, то верхняя полуплоскость взаимно-однозначно переходит во внутренность соответствующего многоугольника.

Задача 3. a) Пусть F — функция, переводящую взаимно-однозначно параллелограмм в верхнюю полуплоскость. Докажите, что F продолжается до эллиптической функции, периоды которой совпадают с удвоенными сторонами параллелограмма.

b) Пусть G — функция, переводящую взаимно-однозначно правильный треугольник в верхнюю полуплоскость. Докажите, что G продолжается до эллиптической функции и найдите её периоды.

c^*) Выразите F и G через $\wp(z)$ и $\wp(z)'$.