Препятствия к кобордантности и нестандартные гомотопические сферы

НМУ, А. Скопенков. Весна 2010

В этих записках приводится построение знаменитого примера Милнора нестандартной гомотопической сферы, а также набросок доказательства знаменитой теоремы Кервера-Милнора о конечности множества гомотопических сфер. Для понимания большей части текста достаточно владения понятием многообразия и основами теории гомологий ([FF89], §§12,13,17 или [Pr04], §15, [Pr06], I). Более того, он содержит набор упражнений по основами теории гомологий и поэтому может быть использован на семинарских занятиях по этой теме (например, в НМУ на 2-м курсе).

Первый и второй пункты независимы друг от друга; третий пункт использует второй.

Большая часть материала преподносится в виде задач. (Это характерно не только для дзенских монастырей, но и для серьезного изучения математики.) Для решения задач достаточно уверенного владения понятием многообразия и основами теории гомологий. Все необходимые *новые* определения приводятся здесь (или даются ссылки). Иногда подсказками являются соседние задачи. Задачи, для решения которых читателю нужна литература (или консультация специалиста), приводятся со звездочками и ссылками. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то это утверждение и надо доказать.

Мы пропускаем целые коэффициенты из обозначений групп гомологий. Мы работаем в гладкой категории, если не оговорено противное.

Нестандартные гомотопические сферы

Пример сферы Милнора. *Существует замкнутое гладкое 7-мерное многообразие, гомотопически эквивалентное (и гомеоморфное) сфере S^7, но не диффеоморфное ей.*

Многообразия M и N называются *гомотопически эквивалентными*, если существуют непрерывные отображения $f : M \to N$ и $g : N \to M$ такие, что $f \circ g$ гомотопно id_N и $g \circ f$ гомотопно id_M.

Обозначим $T_n := \{(x, y) \in S^n \times S^n \ : \ |x, y| \le 1\}$ (трубчатую окрестность диагонали).

1. (a) Чему гомеоморфно T_1?

(b) Чему гомеоморфны T_3 и T_7?

(c) T_2 не гомеоморфно $S^2 \times D^2$. Указание: $H_1(\partial T_2) \not\cong \mathbb{Z}$ аналогично задаче 4d ниже.

(d) T_4 не гомеоморфно $S^4 \times D^4$.

2. (a) Любое отображение $S^1 \to \partial T_4$ гомотопно отображению в точку.

(b) Любое отображение $S^2 \to \partial T_4$ гомотопно отображению в точку.

(c) Не любое отображение $S^3 \to \partial T_4$ гомотопно отображению в точку.

Это значит, что ∂T_4 не является гомотопически эквивалентным сфере S^7 и необходимо усложнение конструкции.

Обозначим $T := T_4$. Для нахождения группы $H_3(\partial T)$ рассмотрим фрагмент

$$H_4(T) \xrightarrow{j} H_4(T, \partial) \xrightarrow{\partial} H_3(\partial T) \xrightarrow{i} H_3(T) = 0$$

точной последовательности пары $(T, \partial T)$. Здесь i — гомоморфизм включения, j — гомоморфизм ‘позволяющий границу’ и ∂ — граничный гомоморфизм.

Для ориентируемого $2n$-многообразия M обозначим через

$$\cap : H_n(M) \times H_n(M) \to \mathbb{Z}$$

его *форму пересечений* [Sk, Sk05, Remark 2.3]. For a manifold M we denote $(M, \partial M)$ shortly by (M, ∂). Аналогично определяется билинейное отображение $\cap : H_n(M, \partial) \times H_n(M) \to \mathbb{Z}$.

3. (a) Обозначим через $[S^4] \in H_4(T)$ гомологический класс диагонали в $S^4 \times S^4$.

(a) $[S^4]$ порождает $H_4(T)$ и $[S^4]\cap[S^4]=2$.

(b) Для любых $x,y\in H_4(T)$ выполнено $x\cap jy=x\cap y$.

(c) Существует $[D^4]\in H_4(T,\partial)$, для которого $[D^4]\cap[S^4]=1$.

(d) $H_3(\partial T)\neq 0$.

Указание: $[D^4]\notin \operatorname{im} j=\ker\partial$, поэтому $\partial\neq 0$.

(e) $H_3(\partial T)\cong\mathbb{Z}_2$.

Обозначим через $p:T\to S^4$ сужение на T проекции $S^4\times S^4\to S^4$ на первый сомножитель. Обозначим через (T',p') копию пары (T,p).

4. Существует диффеоморфизм $f:(p')^{-1}D^4\to p^{-1}D^4$, переводящий пересечение с диагональю в $p^{-1}z$, $z\in\operatorname{Int}D^4$.

Обозначим $V:=T\cup_f T'$. После сглаживания получится 8-многообразие V с краем (которое называется *водопроводным соединением* двух копий многообразия T).

5. (a) Любое отображение $S^1\to\partial V$ или $S^2\to\partial V$ гомотопно отображению в точку.

(b) V гомотопически эквивалентно $S^4\vee S^4$.

(c) $H_4(V)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ имеет базис, в котором матрица формы пересечений $H_4(V)\times H_4(V)\to\mathbb{Z}$ имеет вид $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.

(d) Для этого базиса S_1,S_2 существует базис D_1,D_2 группы $H_4(T,\partial)$, для которого $S_i\cap D_j=\delta_{ij}$.

(e) $H_3(\partial V)\neq 0$.

(f) $H_3(\partial V)\cong\mathbb{Z}_3$.

Итак, ∂V не является гомотопически эквивалентным сфере S^7 и необходимо усложнение конструкции.

П остроение сферы Милнора. Рассмотрим граф с вершинами $1,\dots,8$ и ребрами $12,23,34,45,56,67$ и 58. Для каждой вершины a графа

возьмем свой экземпляр (T_a,p_a) пары (T,p), и

выберем столько непересекающихся дисков $D^4_{ab}\subset S^4$, сколько вершин соединено с a.

Для каждого ребра ab склеим $p_a^{-1}D^4_{ab}$ и $p_b^{-1}D^4_{ba}$, как при построении многообразия V. После сглаживания получится 8-многообразие W с краем. (Оно называется *водопроводным соединением* копий многообразия T сообразно графу.) Край ∂W этого многообразия и есть 7-многообразие из примера Милнора.

6. (a) Любое отображение $S^1\to\partial W$ или $S^2\to\partial W$ гомотопно отображению в точку.

(b) Выберите базисы $S_1,\dots,S_8$ и $D_1,\dots,D_8$ групп $H_4(W)$ и $H_4(W,\partial)$, для которых $S_i\cap D_j=\delta_{ij}$.

(c) Найдите матрицу формы пересечений многообразия W.

(d) $H_3(\partial W)=0$.

(e) Край ∂W гомотопически эквивалентен S^7.

(f) Сигнатура (формы пересечений) многообразия W равна 8.

Читатель, не знакомый с понятием расслоения, может не решать пункты (b,c,d,e) следующей задачи.

7. (a) $S^n\times S^n$ вложимо в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

(b) Сумма касательного расслоения к $S^n\times S^n$ и одномерного тривиального расслоения над $S^n\times S^n$ тривиальна.

(c) Многообразие T_n *параллелизуемо*, т.е. имеет семейство из $2n$ касательных векторных полей, линейно независимых в каждой точке.

(d) Многообразие V параллелизуемо.

(e) Многообразие W параллелизуемо.

(f) Выведите недиффеоморфность ∂W и S^7 из задач 6f, 7e и следующего результата.

Теорема Хирцебруха о сигнатуре. *Сигнатура гладкого замкнутого почти параллелизуемого 8-мерного многообразия делится на 7 (даже на 224).*

8. Построим аналогично 4-мерное многобразий W с краем. Докажите, что ∂W не вложимо гладко в S^4, используя следующий результат. (Заметим, что по теореме Фридмана, ∂W топологически вложимо в S^4.)

Теорема Рохлина о сигнатуре. *Сигнатура гладкого замкнутого почти параллелизуемого 4-мерного многообразия делится на 16.*

Указания.

2. (a) Отображение $S^1 \to \partial T_4$ продолжается до отображения $D^2 \to T_4$. Отображение $D^2 \to T_4$ можно изменить малым шевелением, чтобы оно перестало пересекать диагональ в $S^2 \times S^2$. Отображение $D^2 \to T_4$, не пересекающее диагональ в $S^2 \times S^2$, гомотопно отображению $D^2 \to \partial T_4$.

Замечание. Задачу 2 можно делать, используя точную последовательность расслоения. Для S^1 и S^2 получится то же решение, что и выше, но более сложно изложенное.

5. (a) Используя теорему Зейферт-Ван Кампена и последовательность Майера-Виеториса, докажите $\pi_1(V) = H_2(V) = 0$. Затем воспользуйтесь теоремой Гуревича.

6. (d) Ответ: $a_{ii} = 2$, $a_{ij} = 1$ или $a_{ij} = 0$ сообразно тому, соединены ли вершины i, j ребром или нет.

(e) (ср. [Br72, V.2.7]) Достаточно доказать, что $j : H_4(W) \to H_4(W, \partial)$ эпиморфно. Для произвольного $x' \in H_4(W, \partial)$ определим линейную функцию $f_{x'} : H_4(W) \to \mathbb{Z}$ формулой $f_{x'}(y) = x' \cap y$. По (c) форма пересечений $H_4(W) \times H_4(W) \to \mathbb{Z}$ унимодулярна. Поэтому существует $x \in H_4(W)$, для которого $f_{x'}(y) = x \cap y$ для любого $y \in H_4(W)$. По двойственности Пуанкаре $x' - jx = 0$. Итак, j эпиморфно.

7. (b,c) Докажите и используйте следующий факт: если $p : E \to B$ — векторное расслоение со слоем $\mathbb{R}^n$, $p \oplus \varepsilon$ тривиально и $b := \dim B < n$, то p тривиально. Для доказательства этого факта убедитесь, что препятствия к тривиальности обоих расслоений одинаковы (и, значит, нулевые) ввиду того, что отображение включения $\pi_b(SO_n) \to \pi_b(SO_{n+1})$ является изоморфизмом.

Препятствия к нуль-кобордантности

1. (a) Если A и B — замкнутые многобразия и $A = \partial M$, то $A \times B = \partial(M \times B)$.

(b) Любое одномерное или двумерное замкнутое ориентируемое многобразие является краем некоторого многообразия.

(c) Любое двумерное замкнутое неориентируемое многобразие четной эйлеровой характеристики является краем некоторого многообразия.

2. (a) $\mathbb{R}P^2$ не является краем многообразия.

Решение. Пусть, напротив, M — 3-многообразие и $\partial M \cong \mathbb{R}P^2$. Обозначим через M' копию многообразия M. Тогда $0 = \chi(M \cup_{\mathbb{R}P^2} M') = \chi(M) + \chi(M') - \chi(\mathbb{R}P^2)$, откуда $\chi(\mathbb{R}P^2)$ четно. Противоречие.

(b) Замкнутое 2-многообразие является краем многообразия тогда и только тогда, когда его эйлерова характеристика четна.

(c) **Теорема.** *Если замкнутое многообразие является краем многообразия, то его эйлерова характеристика четна.*

(Эта теорема интересна только для четномерных многообразий.)

(d) Если замкнутое $2k$-многообразие N является краем многообразия, то $\operatorname{rk} H_k(N)$ четен.

Теорема. *Любое замкнутое 3-многообразие является краем некоторого многообразия.*

3. (a) $\mathbb{R}P^{2k+1}$ является краем некоторого многообразия.

(b) $\mathbb{R}P^n$ является краем многообразия тогда и только тогда, когда n нечетно.

(c) $\mathbb{C}P^{2k}$ не является краем многообразия.

(d) $\mathbb{C}P^{2k+1}$ является краем многообразия (даже ориентируемого).

(e) $\mathbb{C}P^n$ является краем многообразия тогда и только тогда, когда n нечетно.

(f) $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ не является краем многообразия.

(g) При каком условии $\mathbb{R}P^{n_1} \times \ldots \mathbb{R}P^{n_k}$ является краем многообразия?

4. (a) Край ориентируемого многообразия замкнут и ориентируем.

(b) Любое одномерное или двумерное замкнутое ориентируемое многообразие является краем некоторого ориентируемого многообразия.

(c) Любое одномерное или двумерное замкнутое ориентированное многообразие является ориентированным краем краем некоторого ориентированного многообразия.

Напомним, что *ориентированным* многообразием называется *ориентируемое* многообразие с фиксированной ориентацией.

Теорема. *Любое замкнутое ориентированное 3-многообразие является ориентированным краем некоторого ориентированного многообразия.*

5. Ориентированное (произвольно) многообразие $\mathbb{C}P^2 \sqcup \mathbb{C}P^2$ не является ориентированным краем ориентированного многообразия.

Указание: если не получается, то см. следующие задачи.

6. Для $2n$-мерного многообразия M с краем и гомоморфизма включения $i : H_n(\partial M) \to H_n(M)$

(a) $ix \cap ix = 0$ при любом $x \in H_n(\partial M)$;

(b) $\operatorname{im} i = H_n(M)^\perp$, где ортогональное дополнение берется относительно формы пересечений $H_n(M) \times H_n(M) \to \mathbb{Z}$.

Указание: используйте следующий результат.

Теорема двойственности Пуанкаре (сложная часть). *Для ориентированного гладкого m-многообразия M билинейное умножение $\cap : H_n(M) \times H_{m-n}(M, \partial) \to \mathbb{Z}$ унимодулярно, т.е. для любого примитивного (т.е. не делящегося на целое число, большее 1) элемента $\alpha \in H_n(M)$ существует такой $\beta \in H_{m-n}(M, \partial)$, что $\alpha \cap \beta = 1 \in \mathbb{Z}$.*

7. (ср. [Pr06, теорема 8.16]) Для ориентированного $(2n+1)$-многообразия M и гомоморфизмов $H_{n+1}(M, \partial) \xrightarrow{\partial} H_n(\partial M) \xrightarrow{i} H_n(M)$ имеем

(a) $x \cap \partial y = ix \cap y$ для любых $x \in H_n(\partial M)$ и $y \in H_{n+1}(M, \partial)$.

(b) $\partial y \cap \partial y = 0$ при любом $y \in H_{n+1}(M, \partial)$.

(c) $\operatorname{im} \partial = (\operatorname{im} \partial)^\perp$, где ортогональное дополнение берется относительно формы пересечений $H_n(\partial M) \times H_n(\partial M) \to \mathbb{Z}$.

(d) $2 \operatorname{rk} \operatorname{im} \partial = \operatorname{rk} H_n(\partial M)$.

8. Теорема Понтрягина (?). *Если замкнутое ориентированное $4k$-многообразие N является ориентированным краем ориентируемого многообразия, то $\sigma(N) = 0$.*

9. (a) *Аддитивность.* $\sigma(M \sqcup N) = \sigma(M) + \sigma(N)$.

(b) *Мультипликативность.* $\sigma(M \times N) = \sigma(M)\sigma(N)$.

(c)* *Аддитивность Новикова-Рохлина.* $\sigma(M \bigcup\limits_{\partial M = \partial N} N) = \sigma(M) + \sigma(N)$ [Pr06].

Указания.

3. (d) Постройте и используйте расслоение $\mathbb{C}P^{2k+1} \to \mathbb{H}P^k$ со слоем S^2. Или постройте и используйте инволюцию на $\mathbb{C}P^{2k+1}$ без неподвижных точек.

(f) $e(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) = e(\mathbb{R}P^2)^2 \equiv 1 \mod 2$.

7. (c) Указание: используйте (a,b) и двойственность Пуанкаре.

Если $x \in H_n(\partial M)$ и $x \cap \operatorname{im} \partial = 0$, то $ix \cap y = x \cap \partial y = 0$ для любого $y \in H_{n+1}(M, \partial)$. Значит, по двойственности Пуанкаре $ix = 0$, т.е. $x \in \operatorname{im} \partial$.

(d) Указание: используйте (c) и двойственность Пуанкаре.

Перестройки и классификация гомотопических сфер

Замкнутые ориентированные многообразия N_1 и N_2 называются *ориентированно кобордантными*, если существует ориентированное многообразие (*ориентированный кобордизм*) с границей $N_1 \sqcup (-N_2)$ (при этом одно из многообразий может быть пустым). Через $-N_2$ обозначается ориентированное многообразие, полученное из N_2 изменением ориентации.

1. (a) $M \sqcup N$ кобордантно $M \# N$.

(b) Любое многообразие кобордантно связному.

2. (a) Перестройка дает многообразие, кобордантное исходному.

(b)* Обратно, если многообразия кобордантны, то одно можно получить из другого перестройками.

3. (a) Любое ориентируемое многообразие размерности $\neq 3$ кобордантно односвязному.

(b) Любое спинорное (т.е. параллелизуемое в окрестности двумерного остова некоторой триангуляции) многообразие размерности ≥ 6 кобордантно двусвязному.

(c) Любое спинорное многообразие размерности ≥ 8 параллелизуемо в окрестности трехмерного остова некоторой триангуляции и потому кобордантно трехсвязному.

Теорема Кервера-Милнора. *Множество θ_n ориентированных n-многообразий, гомотопически эквивалентных S^n (гомотопической сфер), с точностью до сохраняющего ориентацию диффеоморфизма, конечно при $n \geq 6$.*

4. Этот результат равносилен следующему: множество n-многообразий, гомотопически эквивалентных S^n, с точностью до диффеоморфизма, конечно при $n \geq 6$.

Лемма. *Нормальное расслоение вложения гомотопической сферы в $\mathbb{R}^m$ тривиально для большого m.*

Препятствие к тривиальности лежит в $\pi_{n-1}(SO)$. Поэтому лемма верна для $n \equiv 3, 5, 6, 7 \bmod 8$. Для других n доказательство более сложно.

О конструкции Понтрягина см., например, [Pr04], §18.

Для гомотопической сферы $N \subset \mathbb{R}^m$ с нормальным оснащением ζ обозначим через $p(N, \zeta) \in \pi_m(S^{m-n}) \cong \pi_n^S$ класс оснащенного кобордизма.

5. Для стандартной сферы $S^n \subset \mathbb{R}^m$, большого m и $x \in \pi_n(SO_{m-n}) \cong \pi_n(SO)$ рассмотрим оснащение нормального расслоения, полученное из стандартного оснащения при помощи x. Обозначим через $J(x) \in \pi_n^S$ класс оснащенного кобордизма полученного оснащенного многообразия.

(a) Определите аналогично и вычислите $J : \pi_1(SO_2) \to \pi_3(S^2)$.

(b) Вычислите $J : \pi_1(SO) \to \pi_1^S$.

(c)* Вычислите $J : \pi_3(SO) \to \pi_3^S$.

(d) $J : \pi_n(SO) \to \pi_n^S$ гомоморфизм.

(e)* $p(N, x\zeta) = p(N, \zeta) + J(x)$.

Ввиду 5de отображение $p : \theta_n \to \pi_n^S / \operatorname{im} J$ корректно определено формулой $p(N) := p(N, \zeta) + \operatorname{im} J$.

6. (a) Операция связного суммирования превращает θ_n в группу.

(b) p гомоморфизм.

Поэтому и поскольку группа $\pi_n :$ конечна для $n > 0$, достаточно доказать, что $\ker p$ конечно.

7. (a) Если нормальное расслоение тривиально, то сумма касательного и одномерного тривиального тривиальна.

(b) Для связного многообразия с непустым краем если сумма касательного и одномерного тривиального расслоений тривиальна, то касательное расслоение тривиально.

(c) $p(N) = 0$ тогда и только тогда, когда N является границей параллелизуемого многообразия.

В следующих задачах $N = \partial W$ гомотопическая n-сфера и W параллелизуемо. По поводу задач, отмеченных звездочками, см. [KM63].

8. (a) Если W стягиваемо, то $N \cong S^n$.

(b)* Можно так выбрать оснащение сферы $S^i \subset W$, чтобы результат перестройки по этой сфере с этим оснащением был параллелизуемым.

(c) Перестройками можно добиться того, чтобы W стало $([n/2]-1)$-связным.

9. Пусть $n = 2k$ и W' получено из W перестройкой сферы $S^k \subset W$.

(a) Существует $x \in H_k(W')$, для которого $H_k(W')/x \cong H_k(W)/[S^k]$.

(b) Если $[S^k] \in H_k(W)$ примитивен, то $H_k(W') \cong H_k(W)/[S^k]$.

(c) Если $k \geq 4$ четно, то $\mathrm{rk}\, H_k(W') \neq \mathrm{rk}\, H_2(W)$.

(d)* Если $k \geq 4$ четно, то $N \cong S^n$.

(e)* Если $k \geq 3$ нечетно, то $N \cong S^n$.

10. (a)* Если $n = 4l-1 \geq 7$ и $\sigma(W) = 0$, то $N \cong S^n$.

(b)* Существует замкнутое почти параллелизуемое $4l$-многообразие M, для которого $\sigma(M) \neq 0$.

(c) Если $n = 4l-1 \geq 7$ и $\sigma(W)$ делится на $\sigma(M)$, то $N \cong S^n$.

11. Пусть $n = 4l+1 \geq 17$. Перестройками можно добиться того, чтобы W стало $2l$-связным (и осталось параллелизуемым). Реализуем элемент $x \in H_{2l+1}(W)$ вложением $x : S^{2l+1} \to W$. Обозначим через

$$q(x) \in \ker[i_* : \pi_{2l}(SO_{2l+1}) \to \pi_{2l}(SO)] \cong \mathbb{Z}_2$$

препятствие к тривиальности нормального расслоения вложения x. Обозначим $Arf(N) := Arf(q) := \sum_i q(a_i)q(b_i) \in \mathbb{Z}_2$, where $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ is a symplectic basis of $H_{2l+1}(W)$.

(a) q квадратичная форма над $\mathbb{Z}_2$.

(b) $Arf(N)$ действительно зависит только от N.

(c) Если $Arf(N) = 0$, то $N \cong S^n$.

Заметим, что $Arf(N) = 0$ для $l \neq 1, 3, 7, 15, 31$. Это решение знаменитой проблемы Кервера, полученное около 2008 г.

12. Выведите теорему Кервера-Милнора из предыдущего.

Литература

[Br72] Браудер В., Перестройки односвязных многообразий, М., Наука, 1984.

[FF89] А. Т. Фоменко и Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии, Москва, Наука, 1989.

[KM63] A. Kervaire and J. W. Milnor, Groups of homotopy spheres, I, Ann. Math., 77 (1963) 504–537.

[Pr04] В. В. Прасолов, Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии, Москва, МЦНМО, 2004. http://www.mccme.ru/prasolov

[Pr06] В. В. Прасолов, Элементы теории гомологий, Москва, МЦНМО, 2006. http://www.mccme.ru/prasolov

[Sk] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с элементарной точки зрения, Москва, МЦНМО, в печати, http://arxiv.org/abs/math/0808.1395.

[Sk05] A. Skopenkov, A classification of smooth embeddings of 4-manifolds in 7-space, Topol. Appl., to appear. http://arxiv.org/ math.GT/0512594