НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 2.
Кривые в n-мерном евклидовом пространстве.
Поверхности в трёхмерном и n-мерном евклидовом пространстве. Ковариантная производная касательных и нормальных векторов. 15.02.2010.

Задача 1. Рассмотрим кривую в $\mathbb{E}^n$, параметризованную произвольным параметром t. Пусть $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$ обозначает ориентированный объём k-параллелепипеда, порожденного системой векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$. Пусть

$$V_i = \langle \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^i x}{dt^i} \rangle.$$

Доказать, что кривизну и высшие кручения можно найти по формулам

$$k = \frac{V_2}{V_1^3}, \quad \varkappa_i = \frac{V_{i+2} V_i}{V_{i+1}^2 V_1}.$$

Задача 2. Написать параметрическое уравнение тора вращения и найти индуцированную метрику.

Задача 3. Найти первую и вторую квадратичные формы, а также гауссову и среднюю кривизны для сферы произвольного радиуса.

Задача 4. Найти первую и вторую квадратичные формы, а также гауссову и среднюю кривизны для поверхности вращения

$$\mathbf{r}(u, \varphi) = (x(u), \rho(u) \cos \varphi, \rho(u) \sin \varphi).$$

Задача 5. Доказать, что поверхность с нулевыми гауссовой и средней кривизнами есть плоскость.

Задача 6. Доказать, что единственными поверхностями вращения имеющими нулевую среднюю кривизну являются плоскость и катеноид, получаемый вращением кривой $\left(\dfrac{\mathrm{ch}(at+b)}{a}, t \right)$.

Задача 7. Доказать, что средняя кривизна есть интегральное среднее всех нормальных кривизн

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(\varphi)\, d\varphi,$$

где $k(\varphi)$ — нормальная кривизна в направлении φ, отсчитываемом от одного из главных направлений.

Задача 8. Доказать, что коммутатор двух касательных к k-поверхности в $\mathbb{R}^n$ векторных полей снова будет касательным векторным полем.

Задача 9. Найти оператор Вейнгартена и ковариантные производные для

а) сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и

б) тора вращения в $\mathbb{R}^3$.