НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 4.
Параллельный перенос и геодезические. 1.03.2010.

Задача 1. Доказать, что если две поверхности касаются вдоль кривой, то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

Задача 2. Найти оператор переноса на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$. Как он зависит от кривой? *Указание: в задачах 2, 3 и 4 выберите разумный базис в векторных полях.*

Задача 3. На какой угол повернётся касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели $\psi = \psi_0$ на угол α?

Задача 4. Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.

Задача 5. Доказать, что геодезическими на k-плоскости $\mathbb{E}^k$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ являются в точности прямые.

Задача 6. Доказать, что если прямая лежит на поверхности, то она будет геодезической на этой поверхности.

Задача 7. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ касаются по кривой, которая геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

Задача 8. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, причём касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают, то эта кривая является прямой.

Задача 9. Найти геодезические на

а) сфере,

б) цилиндре,

в) круговом конусе (все три поверхности в $\mathbb{E}^3$).

Задача 10. Доказать, что меридианы поверхности вращения — геодезические. При каком условии параллель будет геодезической?

Задача 11. Найти на круговом конусе самопересекающиеся геодезические. *Указание: рассмотрите развёртку конуса. Не забудьте, что геодезическая может иметь несколько самопересечений.*

Задача 12. Описать геодезические на поверхности вращения, получив соотношение между r и α, где r расстояние от точки до оси вращения, а α угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

Задача 13*. Доказать, что геодезические в произвольной параметризации, лежащие на поверхности M и проходящие через заданные точки A и B, совпадают с экстремалями функционала длины

$$L[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right| dt,$$

где $\gamma(t_0) = A$, $\gamma(t_1) = B$. Это утверждение обобщает свойство прямой быть кратчайшей, соединяющей две заданных точки.